

UN POCO SOBRE NÚMEROS REALES

Genaro Luna Carreto ¹

¹Profesor de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.

Capítulo 1

Introducción

Este texto se ideó con la finalidad de cubrir una parte fundamental del curso de matemáticas elementales de la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Sin embargo, por sus características es de mucha utilidad en cualquier curso inicial de matemáticas a nivel universitario.

El material se divide en 7 capítulos y dos apéndices. Al final de cada capítulo se incluye una lista de ejercicios. Algunos de ellos son problemas clásicos. Sin embargo, vienen planteados problemas nuevos.

El capítulo 1 contiene la base de las matemáticas, hablando de aspectos lógicos. El capítulo 2 presenta los axiomas de los números reales, tanto de campo como de orden. Se inicia considerando, como es usual, sólo dos herramientas: los axiomas y la lógica. Desde ese momento comienza nuestra gran tarea: justificar cada una de las propiedades algebraicas que conocemos. Siempre causa mucha confusión en todos los estudiantes tal comienzo. ¿No puedo usar las leyes de los signos? ¿No puedo pasar restando lo que esta sumando? Una lista interminable de dudas surgen al respecto. De manera que, se vio la necesidad de incluir una sección inicial especial, donde se explican ampliamente las razones históricas por las cuales estos apuntes se encuentran estructurados así.

En los capítulos posteriores se abordan temas como valor absoluto, raíz cuadrada e inducción matemática. Es notable, en estos capítulos, el uso de gráficas. Se recurre a estos temas incluidos en los cursos de cálculo, como

herramienta **opcional y puramente auxiliar** y sobre todo para reforzar y vincular (transversalidad) los conocimientos adquiridos en dichas asignaturas. No debe dejarse de lado, la serie de recomendaciones pedagógicas actuales que sugieren el **enfoque geométrico, aritmético y algebraico** combinados, para la mejor comprensión de los conceptos.

Una característica destacable de este libro, es que trae, casi en su totalidad, **las soluciones** (capítulo 7), **tanto de ejercicios numéricos como demostraciones**. Hay razones de peso que justifican dicha inclusión. En la carrera de matemáticas, la actividad cotidiana que, indirectamente, encamina en la comprensión y realización de demostraciones, es la lectura de muchas de ellas.

Por otra parte, los tres apéndices, hablan sobre axioma del supremo, la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y finalmente, los números complejos. El axioma del supremo se encuentra en apartado especial por su naturaleza diferente. Su utilidad es fundamental para la cimentación de las propiedades de \mathbb{R} . Piense en una consecuencia de él: cualquier real positivo tiene raíz cuadrada. Sin embargo, mi experiencia docente indica que su comprensión es difícil y generalmente, las demostraciones y propiedades referentes a él son pasadas en total obscuridad por el estudiante. Muchas veces, no es que el axioma del supremo sea tan complicado, sino que no se nota, no se comprende su gran importancia y de ahí radica su **resistencia a aprenderlo**. Si en una calculadora científica obtengo la raíz cuadrada de cualquier número positivo, ¿por qué tengo que demostrar la existencia de raíces? Si es “claro” que los naturales crecen de manera indefinida, ¿por qué se tiene que mostrar que no tienen cota superior? ¡Vaya situación! A pesar de todo, es medular dar a conocer la existencia de dicho axioma. En estas notas, se incluye la definición, ejemplos y tres aplicaciones.

Me es grato, dar las gracias a todos los estudiantes que me han dado la iniciativa e ímpetu para escribir este texto.

Puebla, Mayo de 2024.

El autor

Contenido

1. Introducción	3
2. Lógicamente necesario	1
2.1. Lógica y tablas de verdad	1
2.1.1. Parte I	1
2.1.2. Parte II	8
2.2. Cuantificadores	13
2.3. Razonamiento	16
3. Los números reales	25
3.1. Reseña histórica necesaria	25
3.2. Axiomas de campo	31
3.2.1. Antes de empezar	31
3.2.2. Axiomas de campo	31
3.3. Consecuencias de los axiomas de campo	35
3.4. Axiomas de orden de \mathbb{R}	46
3.5. Consecuencias de los axiomas de orden	46
4. Valor absoluto	57
4.1. Definición y propiedades	57
5. Raíz cuadrada	69
5.1. Definición de raíz cuadrada y propiedades	69
5.2. La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$	75
6. Inducción matemática	79
6.1. Principio de inducción y ejemplos	79
6.2. Símbolo sumatorio y sus propiedades	84

6.3. Teorema del binomio	90
7. Soluciones	97
A. Axioma del supremo	123
A.0.1. Definición y ejemplos	123
A.0.2. Tres aplicaciones del supremo	125
B. $\sqrt{2}$ es irracional	129
C. Números complejos	131
C.1. Ideas iniciales	131
C.2. Forma trigonométrica	135
C.3. Teorema de moivre	137
C.4. Raíces de números complejos	140

Capítulo 2

Lógicamente necesario

2.1. Lógica y tablas de verdad

2.1.1. Parte I

¿Qué es la lógica? ¿Dónde empiezan exactamente las matemáticas? ¿Dónde surgen sus reglas y quién las inventó? ¿Qué son las tablas de verdad? En esta parte se trata de analizar dichas interrogantes.

Todos, en algún momento de nuestra vida estudiantil y por diversas razones, nos hemos preguntado lo mismo. Hubo un momento, en el cual, el hombre empezó a interactuar con su entorno en forma transformadora, dando solución o respuesta a diversas problemáticas espirituales o materiales que condicionaban su desarrollo, desde ese momento, se completó una caja de herramientas, que demoró millones de años en afinarse: la lógica. Ésta, es el motor del razonamiento en sus diferentes modalidades. Es una ciencia cuyo objeto de estudio es el pensamiento y su estructura. Va en búsqueda de los caminos del pensamiento ordenado y coherente, es decir, la forma de obtener conclusiones correctas a partir de ciertas proposiciones. De manera que, uno de sus productos, representa la esquematización de los procesos mentales.

Elí de Gortari (vea [5, p. 23]) afirma que:

“En consecuencia, la lógica no es únicamente el instrumento empleado para elaborar la ciencia, sino que constituye la expresión activa de la entraña misma de los procesos naturales y so-

ciales y es, ante todo el instrumento para actuación práctica del hombre en el mundo”

por ende, la lógica resulta ser la herramienta madre, constructora de todas las ciencias. Aquí radica su importancia. Sin embargo, se debe decir que no todas las ciencias usan los mismos principios cuando se busca la verdad.

Ejemplo 2.1.1. ¿Qué opinión de merece la proposición “México es un país de no lectores”? Sin duda es verdadera, aunque existan mexicanos que leen mucho, es decir, la veracidad de la proposición no se afecta si existen algunos mexicanos que leen.

Ejemplo 2.1.2. Considere al conjunto $U = \{1, -2, 3\}$. ¿Es verdadera o falsa la proposición “ los números del conjunto U son mayores que cero”? La respuesta es falsa, sin duda, pues el -2 se encuentra en U , pero es negativo. Aquí si afecta la veracidad de la proposición que haya elementos que no sean mayores que cero.

A pesar de ello, la lógica cuenta con tres principios básicos, entendiendo por principio, como aquél enunciado que aceptamos como verdadero:

- (a) El principio de identidad: A es necesariamente A .

Esto significa que cada cosa tiene una esencia, que lo hace ser lo que es. No podemos hacer pasar un número par por uno impar. Tampoco cambiar en un razonamiento una idea o concepto por otro, esperando el mismo resultado.

- (b) El principio de contradicción: Es imposible (vea [6, p. 177]) que una cosa sea y no sea al mismo tiempo y bajo el mismo aspecto

Como consecuencia, se hace evidente una forma de razonamiento típica en matemáticas: reducción al absurdo. Se califica como falsa aquella proposición que implique una contradicción.

- (c) El principio del tercero excluido: Cualquier cosa es o no es, no hay término medio [6, p. 177]

En términos simbólicos, “ A es B ” ó “ A no es B ”

Si retomamos la proposición “México es un país de no lectores”. Aquél mexicano que leé muchos libros, pues se encontraría en un aprieto: por un

lado es lector y por otra no lo es. De manera que hay lógicas donde el principio del tercero excluido no es aceptado. En general se llaman difusas. Para nuestra fortuna, el enfoque de estas notas requiere de estos principios. Sin duda alguna, la ciencia matemática tiene su origen en estos tres principios.

El estudio profundo sobre la forma de solucionar problemas, no sólo matemáticos, arrojó algo inesperado: todos usamos mecanismos idénticos de solución. Considere por ejemplo, los principios de identidad, contradicción y tercero excluido.

Poseemos, en alguna parte de nuestras mentes una placa con las mismas instrucciones. Desde el momento en que un problema complejo se divide en partes para su solución (análisis) y luego se unen las partes (síntesis) para dar una solución integral, nuestro cerebro recurre, tal vez, a las primeras líneas de la placa. Pero esto va más allá. En primer lugar, implícitamente tenemos la facultad de decidir sobre la falsedad o veracidad de ciertos eventos o proposiciones de índole diversa. Si usted está pensando en que hay cosas sobre las cuales no existe certeza, quizá sea mejor la filosofía para usted. Sin embargo, aún en ella, aplicará los mismos mecanismos de análisis. Ahora pensemos simplemente en una situación cotidiana. Suponga que le ha dolido la espalda mucho éste último año. El vecino le plantea la posibilidad de que el responsable tal vez sea el zapato de vestir que usa. ¿Cómo le haría para demostrar que se trata o no del calzado de vestir? Es una pregunta ridícula, pero estoy seguro que la mayoría ya tiene una forma de solucionar el dilema: No usar zapato de vestir por un tiempo, si el dolor desaparece, ya sabemos quien es el responsable; si continua, no es culpa del calzado de vestir. Algún otro vecino metichón le agregaría, que no sólo se trata de los zapatos sino además de su postura poco ergida al caminar. Entonces otro intento de solución es caminar ergido; si el dolor cesa, ya está, por el contrario, no es la postura. Otra posibilidad es no usar zapatos de vestir y caminar ergido; si el dolor cesa, ya se localizó el problema, si no, pues no son los zapatos ni la postura.

La situación hace evidente una maquinaria intrínseca en la búsqueda de soluciones y explicaciones. Uno de los engranes permite visualizar sólo dos posibilidades: falso o verdadero. Esto es, ocurre o no ocurre una situación. En nuestro caso, La explicación es la razón del dolor de espalda, es decir, si hallamos la solución S , entonces se escribiría así:

Si ocurre S entonces me duele la espalda.

Muy en el fondo, al buscar razones, intentamos formar enunciados de la forma: si _ entonces.

Durante las explicaciones surgen inevitablemente la frase: ‘si _ entonces _’ y la partícula ‘y’ en forma de conector.

Veamos otros ejemplos.

Ejemplo 2.1.3. Diga si los enunciados siguientes, donde interviene la partícula ‘y’, son falsos o verdaderos:

1. En México se habla español y en Brasil portugués
2. Los perros son animales de sangre caliente y los patos son mamíferos
3. La luna es de queso y el sol de miel

No he encontrado un alumno que se equivoque en determinar la falsedad o veracidad. Es más, es posible argumentar los porqués: La primera es verdadera pues en México sí se habla español y en Brasil sí se habla portugués; La segunda es falsa porque los perros son de sangre caliente, pero los patos no son mamíferos; la tercera es falsa porque ambas son falsas. Lo extraordinario de la situación es que en todos los enunciados donde participa ‘y’ se resuelven igual. Por otro lado, es evidente, el agotamiento visual y el derroche de palabras durante las explicaciones. Se hace necesaria la introducción de símbolos en vistas de simplificar. La partícula ‘y’ es llamada conjunción y se usa el símbolo \wedge para referirse a ella. El trabajo anterior, concluye que la conjunción es verdadera, sólo si ambas proposiciones son verdaderas. Si representamos a las proposiciones como p y q se tendría la tabla siguiente

p	q	$p \wedge q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

Ahora es fácil responder se donde salió la tabla (de verdad) de la conjunción: de nuestras formas de resolver problemas. ¡No la inventó nadie! Es parte de nuestra naturaleza y es usada de manera extensiva diariamente.

Toca el turno de estudiar la partícula ‘si _ entonces’, con el propósito de localizar su funcionamiento y construir su tabla de verdad. En realidad, tiene la forma

Si p entonces q

Es llamada condicional o implicación y se usa el símbolo \Rightarrow para representarla. Así

$$p \Rightarrow q$$

se lee ‘si p entonces q ’. La proposición p es llamada antecedente y q es el consecuente. En nuestro ser albergamos la posibilidad de identificar implicaciones falsas o verdaderas. Sin embargo, tenemos serias limitaciones para explicar la veracidad de una implicación, lo cuál no nos permite identificar el mecanismo que opera para determinar su veracidad y lograr construir su tabla. Considere el enunciado siguiente:

Si tengo 5 dinosaurios y me dan otro, entonces tendré 6 dinosaurios

¿Es verdadera? Pues sin duda sí. Empero, no existen elementos fáciles de distinguir que nos permitan, dilucidar como trabaja nuestra mente en emitir el juicio: es verdadera. Por otra parte, considere la implicación:

Si como un helado entonces se me cae la cabeza

Nuestra mente la cataloga rápidamente como falsa y nos da razones claras: es falsa porque

he comido helado y no se me ha caído la cabeza

es verdadera. Puede intentar con las implicaciones que guste y notará el hecho de que una implicación falsa origina una conjunción verdadera. Pongamos esto en forma simbólica:

1. p : Como helado
2. q : Se me cae la cabeza

La implicación original dada por

Si como un helado entonces se me cae la cabeza

tiene como forma simbólica: $p \Rightarrow q$. Por otro lado, la razón por la cual ésta es falsa

he comido helado y no se me ha caído la cabeza

adquiere la forma: $p \wedge \neg q$. Pero eso no es todo, la falsedad de $p \Rightarrow q$ es atribuida a la veracidad de $p \wedge \neg q$. Sin darnos cuenta, en realidad se está asociando la negación de $p \Rightarrow q$ con $p \wedge \neg q$, esto es, para nuestro cerebro

$$\neg(p \Rightarrow q) \quad \text{y} \quad p \wedge \neg q$$

corresponden a la misma cosa.

Nos hemos alejado de nuestra tarea que era construir la tabla de verdad de la implicación. Entonces $p \Rightarrow q$ es falsa por que $p \wedge \neg q$ es verdadera. La última expresión es una conjunción de manera que p es verdadera y $\neg q$ es verdadera. En resumen, la única posibilidad de que una implicación $p \Rightarrow q$ sea falsa por que p sea verdadera y q falsa. La tabla de verdad de la implicación sería

p	q	$p \Rightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Existe otra partícula usada en razonamientos: ‘o’. Es llamada disyunción y simbolizada por \vee . Incluyo su tabla de verdad:

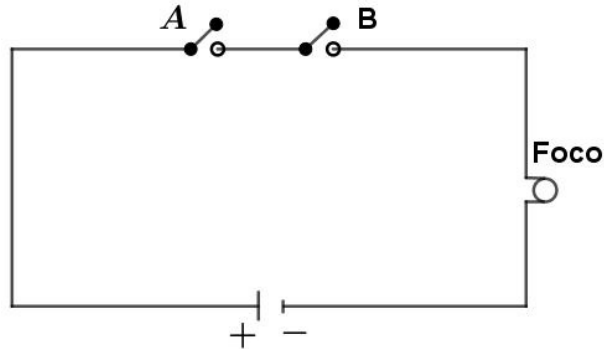
p	q	$p \vee q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

Finalmente, a manera de conclusión, podemos decir que, a partir de la estructura cerebral humana y la lógica surgieron las tablas de la conjunción, implicación y disyunción que dan origen y vida a lo que usualmente llamamos matemáticas. Claro que cuando se trata el tema en la mayor parte de los libros, se empieza con la definición de las tablas de verdad, sin darnos ninguna motivación en cuanto a su forma. A decir verdad, se empieza al revés, tanto que la expresión de identidad entre las proposiciones

$$\neg(p \Rightarrow q) \quad \text{y} \quad p \wedge \neg q$$

que dio origen a la tabla de verdad de la implicación, se obtiene como consecuencia de las definiciones.

Ejercicios 1. 1. A continuación se presenta un diagrama:

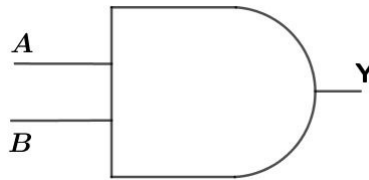


Se trata de un clásico circuito, el llamado circuito AND (compuerta AND). El foco enciende cuando los interruptores de entrada A y B están cerrados (valor 1 y 1). Si alguno de ellos queda abierto (valor 0), el foco no encenderá?. La siguiente tabla, muestra todas las posibilidades de los interruptores A y B :

Interruptor A	Interruptor B	Foco encendido
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

1 indica interruptor cerrado y 0 indica interruptor abierto. Naturalmente, 1 en el caso del foco indica encendido. La notable equivalencia de resultados con la conjunción, da la razón por la cual se llama compuerta AND.

Ya en el área de electrónica, se usa un símbolo especial para tal compuerta:



En la rama tecnológica, se ha desarrollado un circuito integrado (vea siguiente imagen), llamado de la misma manera, compuerta AND y cuyo número de referencia, 7408, es muy conocido.



Ahora su tarea: se han mencionado varias tablas de verdad: conjunción, disyunción, condicional, bicondicional, negación. Investigue todas operaciones (XOR, NAND, etc) que resultan de abarcar todas las posibilidades de falso verdadero en la tabla semejante a las operaciones dadas. Investigue en el ámbito de la electrónica, su nombre, su símbolo, si tiene algún circuito que lo represente y si existe circuito integrado asociado.

2.1.2. Parte II

De la parte anterior, se pueden obtener varias conclusiones importantes:

1. El ser humano tiene la facultad de determinar la falsedad o veracidad de ciertos eventos o enunciados. Dicha dualidad, reduce el análisis a enunciados que tengan esa cualidad
2. Existe un mecanismo común a todos los hombres que les permite resolver problemas diversos y no sólo de matemáticas
3. Es posible esquematizar ciertas partes del pensamiento humano, lo cual se hace llamar lógica, que muestran el punto de partida de las matemáticas

Después de la introducción y motivación dada en la parte I, hemos llegado a un punto fundamental en este desarrollo. Resulta ineludible y de suma importancia en la construcción de cualquier estructura matemática, el considerar, en forma inicial, la veracidad de ciertas proposiciones, modalidad de estudio refinada por el matemático griego Euclides. En nuestro caso, daremos por ciertos los tres principios de la lógica: identidad, contradicción y del tercero excluido. Así pues, en matemáticas no es posible trabajar con cualquier tipo de enunciado. Se entiende ahora lo siguiente:

Definición 2.1.1. Un enunciado que pueden calificarse como falso o verdadero, pero no ambas cosas al mismo tiempo, es llamado proposición lógica.

1. Las órbitas de los planetas son elípticas.
2. El pato es mamífero
3. Me gusta cuando callas
4. La muñeca es azul
5. $x + 5 = y$.

No hay duda de la veracidad de la primera. La segunda es falsa, pues los patos no son mamíferos. La tercera, un poco ambigua, pero finalmente no puede calificarse como falsa o verdadera, es decir, no es lógica. La cuarta nos deja con un sensación rara. Si tan sólo nos dijeran de que muñeca se trata, podríamos decidir la veracidad o falsedad de la misma. Comparte la misma característica con el enunciado 4: si nos dijeran cuando vale x e y , sabríamos si es falsa o verdadera.

Existe una importante gama de proposiciones, que contienen elementos variables que al ser sustituidos por un elemento particular, la convierten en lógica, estas se llaman **proposiciones abiertas**. En consecuencia las proposiciones 3 y 4 son abiertas. En la 3 interviene la variable muñeca y en la 4 las variables x e y .

Es común construir proposiciones lógicas muy elaboradas a partir de simples, llamadas compuestas. Durante su construcción intervienen partículas como: ‘o’, ‘y’, ‘si - entonces’, ‘es falso que’. Tales partículas son llamados **conectivos lógicos**. Como ya se vio en la parte I, se utilizan símbolos y nombres especiales para ellos.

Partícula	Nombre	Símbolo
y	conjunción	\wedge
o	disyunción	\vee
si _ entonces	implicación	\Rightarrow
Es falso que	negación	\neg

Además, se aceptan las correspondientes tablas de verdad, ya vistas en la sección anterior:

p	q	$p \wedge q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

p	q	$p \Rightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

p	q	$p \vee q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

A continuación explico como trabajar proposición lógicas compuestas. Algunas tienen un aspecto complicado, pero es altamente probable que, en algunos razonamientos las hayas utilizado

Ejemplo 2.1.4. Determine si la proposición

$$\neg p \wedge (p \Rightarrow q)$$

es falsa o verdadera, siendo p falsa y q verdadera.

En este caso, se deben considerar las tablas de verdad de la conjunción y la implicación. Resolvamos por partes. $p \Rightarrow q$ es una implicación con antecedente falso y consecuente verdadero, según la tabla de la implicación, resulta que es verdadera. Por otro lado, debido a que p es falsa, entonces $\neg p$ es verdadera. Así que $\neg p \wedge (p \Rightarrow q)$ es una conjunción, formada por un par de enunciados verdaderos, por lo tanto, de acuerdo con la tabla de la conjunción, es verdadera

En el ejemplo anterior, es notable la dificultad para explicar la veracidad de $\neg p \wedge (p \Rightarrow q)$, sabiendo que p es falsa y q es verdadera. Es útil ordenar las expresiones y plantear una solución de la siguiente forma:

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \wedge (p \Rightarrow q)$
F	V	V	V	V

Cuando se pide obtener la falsedad o veracidad de una proposición, es frecuente decir que se obtiene su **valor de verdad**.

Ejemplo 2.1.5. Determina el valor de verdad de la proposición

$$\neg p \wedge (p \Rightarrow q)$$

¿Qué diferencia tiene con el ejercicio anterior? Pues en este caso, no se dan valores de verdad particulares para p y q . De manera que se tienen que generar todas las posibles combinaciones, de lo cual se obtiene la tabla de verdad de la proposición en cuestión. Acomodaré los elementos en una tabla, sin antes decir que no es la única forma de colocarlos, existen varias formas correctas. Es importante recordar que las proposiciones p y q tienen, cada una, dos valores de verdad.

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \wedge (p \Rightarrow q)$
V	V	F	V	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

La tabla de verdad de $\neg p \wedge (p \Rightarrow q)$ produce los resultados: F, F, V, V .

Ejemplo 2.1.6. Determina la tabla de verdad de la proposición

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Intervienen tres proposiciones p, q y r , entonces hay 8 posibles combinaciones de falso verdadero.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

El valor de verdad de la tabla de verdad para $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ es siempre verdadero.

Es claro que las tablas de verdad de las proposiciones arrojan valores falsos y verdaderos, pero como en el caso anterior, algunas tienen la propiedad de ser siempre verdaderas independientemente del valor de verdad de sus proposiciones componentes. Las proposiciones con ésta cualidad se conocen como **tautologías**.

Ejemplo 2.1.7. Calcula la tabla de verdad de

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

La expresión anterior $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ tiene una singularidad: el enunciado es verdadero sólo cuando p y q coinciden en sus valores de verdad, es decir, si p es falsa q también; si p es verdadera q también. Esta relación es muy importante en la investigación. Muchas veces un problema no se ha resuelto por su forma, sin embargo, para su solución se recurre a otro problema que “diga lo mismo” en palabras y términos diferentes.

Históricamente, el caso que dejó enseñanza en esa dirección fue el postulado V de Euclides, que a la letra dice:

“Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos”

¿Suena complicado? Durante su estudio, surgieron enunciados, aparentemente diferentes, pero que “dicen lo mismo”, a saber

“La suma de los ángulos internos en cualquier triángulo es igual a 180 grados”

y éste otro, que se da como V postulado en nuestra educación básica:

“A través de un punto P situado a fuera de una línea recta sólo se puede trazar una recta paralela a la recta dada”

Ahora otro ejemplo. En el año 1992 Andrew Walis presentó la solución al famosísimo problema de Fermat, que es un especie de generalización del teorema de Pitágoras:

“No existe número natural $n > 2 : X^n + Y^n = Z^n$ ”

Lo notable es que el problema ya tenía alrededor de 300 años sin solución y se tuvo que recurrir a un problema muy diferente, pero con el “mismo contenido”:

“Toda curva elíptica racional es modular”

Problemas y conceptos surgidos en diferente época y en forma independiente, pero que tienen la misma naturaleza. No es importante si no comprendes los conceptos de los ejemplos, la finalidad es dejar claro que existe

la necesidad de una definición que nos permita identificar cuando dos proposiciones “dicen lo mismo”.

Definición 2.1.2. Se dice que p y q son equivalentes si

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

es una tautología. Lo cual se simboliza como $p \equiv q$

Es frecuente escribir $p \Leftrightarrow q$ en lugar de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Algunos textos, consideran a \Leftrightarrow como otro conectivo lógico con tabla de verdad

p	q	$p \Leftrightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

Ejercicios 2. 1. Obtenga la tabla de verdad de

a) $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow r$

b) $(p \vee q) \Rightarrow q$

2. Obtenga la tabla de verdad de las siguiente proposiciones. Use la tabla de verdad del conectivo \Leftrightarrow .

a) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

c) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p)$

2.2. Cuantificadores

Sería bueno que revisaras y repasaras la parte I y parte II, sobre todo la parte I donde explicamos el origen de la equivalencia $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$, porque procederemos en forma análoga.

Existen un par de razonamientos diferentes a los que hemos visto y son dignos de estudio. Empecemos considerando la siguiente lista de proposiciones. ¿Cuales son falsas? ¿Cuales verdaderas?

1. Todos los seres humanos vivos tienen corazón
2. Existen mamíferos acuáticos
3. Todas las aves vuelan
4. Hay humanos viviendo en júpiter
5. Todos los estudiantes de la buap son mexicanos

Al igual que con la conjunción e implicación tenemos los mecanismos mentales para determinar su falsedad o veracidad. Es más, los enunciados tienen partes comunes. Veamos la forma de simbolizarlas. Si tomamos la proposición 1, al inicio aparece la palabra “todos” que es equivalente a “para cada”, “todo”, “cualquier” etc. Dicha partícula y sus equivalentes semánticos se denotan por

$$\forall$$

se llama cuantificador universal. Se distingue, además, un conjunto y una condición sobre sus elementos. El conjunto son los seres humanos vivos, la condición es que cada humano vivo tiene corazón. Denotemos al conjunto como U . El símbolo $x \in U$, se lee “ x pertenece a U ” o “ x está en U ”. Es claro que $x \in U$, también significa que x es humano. La condición sobre los elementos de U , en este caso de x , se puede entender como una proposición abierta $p(x)$, que se transforma en verdadera o falsa según del elemento que se trate. La forma simbólica de la proposición 1 es

$$\forall x \in U : x \text{ tiene corazón}$$

Si consideramos $p(x) : x \text{ tiene corazón}$, es posible escribirla en forma compacta:

$$\forall x \in U : p(x)$$

En este caso especial, si Juan es un humano, $p(\text{Juan})$ significa “Juan es humano”. Es evidente que $p(x)$ siempre es verdadera. Se concluye que $\forall x \in U : p(x)$ es verdadera.

Me extendí en la explicación con una proposición para ganar espacio en la explicación de las otras. En la siguiente tabla aparece el símbolo \exists , que significa “existen”, “hay” y sus equivalentes semánticos. Es conocido como cuantificador existencial.

Enunciado	Conjunto	Proposición (condición)	forma simbólica	Valor de verdad
Todos los seres humanos vivos tienen corazón	humanos vivos	$p(x) : x$ tiene corazón	$\forall x \in U : p(x)$	verdadera
Existen mamíferos acuáticos	mamíferos	$p(x) : x$ es acuático	$\exists x \in U : p(x)$	verdadera
Todas las aves vuelan	aves	$p(x) : x$ vuela	$\forall x \in U : p(x)$	falsa
Hay humanos viviendo en júpiter	humanos	$p(x) : x$ vive en júpiter	$\exists x \in U : p(x)$	falsa
Todos los estudiantes de la buap son mexicanos	Estudiantes buap	$p(x) : x$ es mexicano	$\forall x \in U : p(x)$	falsa

Ahora tomemos la expresión 3:

Todas las aves vuelan

¿Cómo sabemos que es falsa? ¿Qué forma tiene la argumentación sobre la falsedad? Analicemos la argumentación en términos de la forma simbólica dada en la tabla: $\forall x \in U : p(x)$. Es falsa porque:

existen aves que no vuelan

Si observan la proposición original tiene un cuantificador universal y la argumentación tiene un existencial; aparece el mismo conjunto, pero la proposición abierta $p(x) : x$ vuela, se encuentra negada. Entonces, la argumentación de falsedad de la expresión

$$\forall x \in U : p(x)$$

se da en términos de la veracidad de

$$\exists x \in U : \neg p(x)$$

En realidad, se está diciendo que $\forall x \in U : p(x)$ es falsa porque $\exists x \in U : \neg p(x)$ es verdadera. Es decir, nuestro cerebro está considerando

$$\neg \left(\forall x \in U : p(x) \right) \equiv \exists x \in U : \neg p(x) \quad (2.1)$$

Claro que la demostración de la equivalencia se debe dar en términos de la definición de proposiciones equivalentes. La explicaré con detalle, a través de la exposición de una técnica, aparentemente diferente que una tabla de verdad, pero sin duda, es una tabla de verdad.

Por cuestiones de comodidad, sea $S = \neg(\forall x \in U : p(x))$ y $T = \exists x \in U : \neg p(x)$. Según la definición de equivalencia la proposición $(S \Rightarrow T) \wedge (T \Rightarrow S)$ debe ser una tautología, es decir, siempre debe ser verdadera. Entonces hagamos la tabla de verdad:

S	T	$S \Rightarrow T$	$T \Rightarrow S$	$(S \Rightarrow T) \wedge (T \Rightarrow S)$
V	V	V	V	V
V	F			
F	V			
F	F	V	V	V

¿Por qué no está llena la tabla? Lo que explicaremos es que los casos que faltan, combinaciones falso verdadero, son imposibles.

Suponga que S es verdadera y T es falsa. Entonces $\neg S$ es falsa, o sea

$$\forall x \in U : p(x)$$

es falsa. Entonces existe $x \in U$, tal que $p(x)$ es falsa. En consecuencia, existe $x \in U$ tal que $\neg p(x)$ es verdadera. Sin embargo, esto quiere decir que

$$\exists x \in U : \neg p(x) \text{ es verdadera,}$$

pero esto es justamente T . Así que T sería falsa y verdadera a la vez, lo cual no puede ser. En forma análoga si S es falsa y T es verdadera. Así pues $(S \Rightarrow T) \wedge (T \Rightarrow S)$ siempre es verdadera, por ello, es una tautología. En conclusión,

$$\neg\left(\forall x \in U : p(x)\right) \equiv \exists x \in U : \neg p(x) \quad (2.2)$$

El análisis precedente, tiene cara de todo menos de tabla de verdad. Es la forma de trabajo que en matemáticas ha sustituido a las tablas de verdad y es la herramienta más fuerte en la explicación de verdades matemáticas. No lo olvide porque en el futuro éste proceso será conocido como demostración.

2.3. Razonamiento

El propósito de esta parte es definir razonamiento válido o correcto. Hay necesidad de ello sobre todo por la gran diversidad de formas de razonar, no

todas correctas. De uso generalizado las falacias constituyen una forma de razonamiento común e incorrecto, en todos los niveles sociales, incluso dentro del ámbito académico. En la mayoría de diccionarios, el concepto de falacia no dice gran cosa: son argumentos incorrectos, pero parecen correctos. Sin embargo, ¿qué significa argumento correcto? Mencionaré algunos tipos de falacias, con la finalidad de identificar las múltiples maneras de argumentar, a todas luces incorrecta:

1. La falacia de autoridad individual consiste en decir que algo es verdadero porque alguien que nosotros reconocemos como bueno o con cualidades aceptables o admiradas por nosotros lo dice.
2. Se incurre en la falacia de composición cuando se atribuyen propiedades de los miembros de un conjunto a todo el conjunto, o bien cuando se atribuyen propiedades de las partes al todo.
3. En la falacia de división se atribuyen incorrectamente propiedades del conjunto a cada uno de sus miembros o, propiedades del todo a sus partes.
4. Se comete esta falacia cuando en lugar de ofrecer razones adecuadas para defender una conclusión, se apela a la lástima o conmiseración de la gente para que acepte esta última.
5. falacia de falsa causa cuando a partir de la ocurrencia de dos eventos, uno seguido de otro, se establece una relación causal sin base suficiente para ello, sólo por haber ocurrido sucesivamente.
6. Cuando alguien persuade a otra persona para que acepte determinada conclusión haciéndole ver las consecuencias adversas que se seguirían de su no aceptación en lugar de ofrecer premisas pertinentes, está incurriendo en la falacia de apelación a la fuerza.
7. Una falacia comúnmente usada es la llamada *ad hominem*, que consiste en no atacar directamente los argumentos de otra persona, sino ir directamente contra las circunstancias o condiciones de ella, en razón de: sexo, origen, etnia, estatus social, edad, etc.

Me parece que hemos recurrido a más de una de ellas a lo largo de nuestra vida. Son vicios muy difíciles de combatir. Al momento de ingresar a ciencias

exactas, el estudiante cree que cualquier falacia es válida, tan sólo por constituir un razonamiento. Con lo que respecta a la disciplina de matemáticas, sí existe en forma precisa el concepto de razonamiento válido. Cualquier argumentación debe satisfacer los requerimientos de tal definición, de lo contrario no es aceptada.

Por otro lado, se debe hacer notar que no todos los problemas que aquejan al hombre pueden resolverse con las leyes lógicas que hemos construido. La problemática social tiene sus propias reglas de análisis. Se permite ampliar la lógica formal, estructurada aquí, para aceptar algunos “errores” y lograr aun así la veracidad o falsedad de una proposición en términos sociales. Por ejemplo, muy seguido en los diversos medios de comunicación se dice que “al mexicano no le gusta la lectura” o “México es un país de obesos”. ¿Cuál es tu opinión? Si lo analizas con las leyes vistas, ambos serían falsos. La argumentación sería así:

Ejemplo 2.3.1. La proposición “al mexicano no le gusta la lectura” es falso, porque hay mexicanos que sí leen

Ejemplo 2.3.2. El enunciado “México es un país de obesos” es falso, porque existen mexicanos delgados.

Sin embargo, las argumentaciones ahora son erróneas. Cuidado con eso. Hay grupos en las áreas de ciencias exactas, desarrollando otros tipos de lógica que permiten considerar ciertos parámetros o funciones que determinan la falsedad o veracidad dentro de ciertos rangos. La llaman lógica difusa. Veamos la definición de razonamiento y razonamiento correcto.

Definición 2.3.1. Un razonamiento es una implicación de la siguiente forma:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \implies r$$

En particular, si dicha implicación es una tautología, el razonamiento se llama **correcto ó válido**. También, en este caso, es aceptado el término regla de inferencia.

De acuerdo a la definición, si queremos mostrar que un razonamiento es correcto, tenemos que mostrar que el resultado de su tabla de verdad, siempre es verdadero.

Ejemplo 2.3.3. Muestra que

$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

es una regla de inferencia.

En primer lugar, es un razonamiento porque es una implicación y tiene como antecedente una conjunción de proposiciones, como lo indica la definición 2.3.1. En segundo lugar, se debe hacer una tabla de verdad como las vistas en secciones anteriores y, mostrar que el valor de verdad siempre es V, en todos los casos. Le dejo a usted que haga la tabla de verdad, en este caso, muy sencilla.

Lo que haré ahora es resolverlo de otra manera. Pondré todos los detalles y seré repetitivo, pero léalo con cuidado. Si entiendes completamente la explicación, las matemáticas no se te dificultarán. Empezamos:

Se tiene que probar que $(p \wedge q) \Rightarrow p$ es una tautología, en otras palabras, que la implicación $(p \wedge q) \Rightarrow p$ siempre es verdadera. Voy a suponer que la implicación es falsa. Como se trata de una condicional, solamente es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso (vea tabla de verdad de implicación). De manera que $p \wedge q$ es verdadera y q es falsa. La veracidad de la conjunción permite deducir que p es verdadera y q es verdadera. Entonces q es falsa y verdadera al mismo tiempo, lo cual no puede ocurrir. Por lo tanto, la falsedad de la proposición $(p \wedge q) \Rightarrow p$ generaría contradicciones, por lo tanto es siempre verdadera.

La misma mecánica del ejemplo anterior le servirá en muchos casos.

Ejemplo 2.3.4. Prueba que

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r) \quad (2.3)$$

es un razonamiento válido

En las páginas anteriores ya se mostró que es una tautología. Ahora lo haré con el método del ejemplo previo.

Suponga que la implicación dada en (2.3) es falsa. Entonces $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ es verdadera y $(p \Rightarrow r)$ es falsa. Se tiene que $(p \Rightarrow q)$ y $(q \Rightarrow r)$ son verdaderas y $(p \Rightarrow r)$ es falsa. De ésta última implicación falsa se obtiene que p es verdadera y r es falsa. En virtud de la veracidad de $(q \Rightarrow r)$ y la falsedad de r , se concluye que q debe ser falsa. Ahora bien, $(p \Rightarrow q)$ es verdadera y q es falsa, por ende p es falsa. Se ha llegado a que p es verdadera y falsa a la vez, lo cual es absurdo. Por consiguiente suponer la falsedad de

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

conduce a contradicciones, por lo tanto debe ser siempre verdadera.

Por comodidad los razonamientos $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \implies r$ se escriben verticalmente

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ \underline{P_n} \\ r \end{array}$$

En particular $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ tiene la representación:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \underline{q \Rightarrow r} \\ p \Rightarrow r \end{array}$$

Hay otra proposición semejante, pero más general, que también es razonamiento válido:

Ejemplo 2.3.5. Demuestra que

$$\begin{array}{c} \forall x \in U : p(x) \Rightarrow q(x) \\ \underline{\forall x \in U : q(x) \Rightarrow r(x)} \\ \forall x \in U : p(x) \Rightarrow r(x) \end{array} \quad (\text{I})$$

es razonamiento correcto.

Suponga que la implicación es falsa. Entonces

$$\forall x \in U : p(x) \Rightarrow q(x) \quad (2.4)$$

$$\forall x \in U : q(x) \Rightarrow r(x) \quad (2.5)$$

son verdaderas, pero $\forall x \in U : p(x) \Rightarrow r(x)$ es falsa. Ésta última trae como consecuencia que

$$\neg(\forall x \in U : p(x) \Rightarrow r(x))$$

sea verdadera. Utilizando una propiedad ya mostrada al final de la parte de cuantificadores

$$\neg(\forall x \in U : p(x) \Rightarrow r(x)) \equiv \exists x \in U : \neg(p(x) \Rightarrow r(x)) \quad (2.6)$$

$$\equiv \exists x \in U : p(x) \wedge \neg r(x) \quad (2.7)$$

Por lo tanto existe $x_0 \in U$ tal que: $p(x_0) \wedge \neg r(x_0)$ es verdadera. La conjunción implica: $p(x_0)$ es verdadera y $r(x_0)$ falsa. Por otro lado, según las ecuaciones (2.4) y (2.5)

$$p(x_0) \Rightarrow q(x_0) \quad (2.8)$$

$$q(x_0) \Rightarrow r(x_0) \quad (2.9)$$

son verdaderas. Como $r(x_0)$ es falsa, la veracidad de (2.9), permite concluir que $q(x_0)$ es falsa. Análogamente, la falsedad de $q(x_0)$, según (2.8), implica que $p(x_0)$ es falsa. Finalmente, $p(x_0)$ es falsa y verdadera al mismo tiempo, lo cual es una contradicción, por ende la implicación (I) es siempre verdadera.

Ejemplo 2.3.6. Muestra que

$$\frac{p \vee q}{\neg q} \quad (II)$$

$$p \quad (2.10)$$

es un razonamiento válido

Suponga que la implicación es falsa. Tenemos entonces que $(p \vee q)$ es verdadera, $\neg q$ es verdadera, pero p es falsa; se sigue que q es falsa. Para que la disyunción $p \vee q$ sea verdadera basta que alguno de ellos sea verdadero (vea su tabla de verdad), pero se sabe q que es falsa, por ende p es verdadera. En resumen, p es verdadera y falsa al mismo tiempo, lo cual es imposible. La contradicción se produce si la implicación (II) es falsa, por lo tanto siempre es verdadera, en otras palabras, es una tautología.

Ejemplo 2.3.7. Muestra que

$$\begin{array}{l} \exists x \in U : p(x) \\ \forall x \in U : q(x) \\ \hline \exists x \in U : p(x) \wedge q(x) \end{array} \quad \text{(III)}$$

es una regla de inferencia

Empiece suponiendo que la implicación (III) es falsa. Entonces

$$\exists x \in U : p(x) \quad (2.11)$$

$$\forall x \in U : q(x) \quad (2.12)$$

$$(2.13)$$

son verdaderas y $\exists x \in U : p(x) \wedge q(x)$ es falsa. De manera que $\neg(\exists x \in U : p(x) \wedge q(x))$ es verdadera. De acuerdo a lo estudiado

$$\neg(\exists x \in U : p(x) \wedge q(x)) \equiv \forall x \in U : \neg(p(x) \wedge q(x)) \quad (2.14)$$

$$\equiv \forall x \in U : \neg p(x) \vee \neg q(x) \quad (2.15)$$

Así que, para cada $x \in U$: $\neg p(x) \vee \neg q(x)$ es verdadera. Según la expresión (2.11), existe x_0 tal que $p(x_0)$ es verdadera. Entonces $\neg p(x_0)$ es falsa. Como $\neg p(x) \vee \neg q(x)$ es verdadera, se sigue que $\neg q(x_0)$ es verdadera, de donde $q(x_0)$ es falsa. Esto contradice la ecuación (2.12).

Ejemplo 2.3.8. Investigue si la proposición

$$\begin{array}{l} \exists x \in U : p(x) \\ \exists x \in U : q(x) \\ \hline \exists x \in U : p(x) \wedge q(x) \end{array}$$

es regla de inferencia o no.

El problema es complicado para el estudiante, pues el trabajo es doble: ¿será o no será? Intente probar que es razonamiento válido como en los ejemplos anteriores. Descubra dónde hay dificultades de índole lógico, para concluir que es razonamiento válido. En realidad, no es una regla de inferencia. Daré un ejemplo donde la implicación es falsa. Sea $U = \{0, 1, 2\}$. Es claro que $\exists x \in U : 1 < x$ y $\exists x \in U : x < 2$ son verdaderas, pero $\exists x \in U : 1 < x \wedge x < 2$ es falsa.

Ejercicios 3. 1. Hay reglas de inferencia comunes, incluso con nombres particulares. Por ejemplo, la proposición (2.3) es conocida como **silogismo hipotético**.

Muestra que la siguiente proposición, llamada **Modus tollens**, es una regla de inferencia:

$$\frac{p \Rightarrow q \quad \neg q}{\neg p}$$

De pasada investiga: modus ponens, silogismo disyuntivo, reducción al absurdo.

2. Usando una tabla de verdad, muestra que

$$\frac{p \Rightarrow q \quad q}{p}$$

no es razonamiento válido. Además, proporciona p y q particulares, donde se haga evidente la falsedad de la proposición.

3. Les diseñé este par de proposiciones. Muestra que se trata de razonamientos correctos, usando una tabla de verdad y sin hacer explícitamente una tabla de verdad

a)

$$\frac{p \wedge q \quad q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$$

b)

$$\neg q \Rightarrow (p \wedge r)$$

$$r \Rightarrow q$$

$$\overline{q \vee r}$$

Capítulo 3

Los números reales

3.1. Reseña histórica necesaria

El conjunto de los números reales, denotado por \mathbb{R} , es la colección de todos los números que conocemos y usamos en la vida cotidiana. Son el resultado de la necesidad que el ser humano ha tenido de contar, pesar, medir etc. Es muy probable que los primeros números en ser usados hayan sido los números naturales, esto es, los números que utilizamos para contar. Una forma de referirse a ellos es la siguiente

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$$

Ahora bien, imagine usted que un par de grupos humanos se unieron por cuestiones de supervivencia, ¿que pasaría con las posesiones? ¿Cómo se manejaría la cantidad de animales del nuevo grupo? Dos conceptos fundamentales surgieron simultáneamente al hecho de contar: sumar y agrupar (dividir).

Así pues, los naturales y las fracciones (en forma de agrupamientos) se empezaron a usar, me parece, en forma simultánea. La idea de restar también se trabajaba, por lo menos en situaciones prácticas, pero demoró más tiempo en evolucionar hacia los números negativos considerados como un conjunto numérico al estilo de \mathbb{N} . Es común referirse al conjunto

$$\{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$$

como conjunto de enteros y denotarlo como \mathbb{Z} .

El desarrollo de la matemática ha permitido formar una colección, un conjunto impresionante de números que incluyen tanto a naturales, enteros y sus respectivos cocientes: los racionales. Dicho conjunto es denotado por \mathbb{Q} . La definición por comprensión es

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0 \right\}$$

Existen descripciones de \mathbb{Q} donde agregan que son números con expansión decimal finita o infinita pero periódica. De manera que

$$1, -4, \frac{3}{4}, 2.13 \text{ y } 5.345345345345 \dots,$$

serían ejemplos de racionales. Es un conjunto tan completo y con tanta riqueza que en un momento de la historia se pensó que todos los números eran de esa naturaleza. Incluso, los pitagóricos, un grupo de la antigua grecia, los consideraba ordenadores y gobernantes del universo. En su obra *Metáfisica* el propio Aristóteles afirmaba:

“los Pitagóricos creían percibir en los números (fraccionarios) más bien que en el fuego, la tierra y el agua, una multitud de analogías con lo que existe y lo que se produce. Tal combinación de números, por ejemplo, les parecía ser la justicia, tal otra el alma y la inteligencia, tal otra la oportunidad; y así, poco más o menos, hacían con todo lo demás; por último, veían en los números las combinaciones de la música y sus acordes. Pareciéndoles que estaban formadas todas las cosas a semejanza de los números, y siendo por otra parte los números anteriores a todas las cosas, creyeron que los elementos de los números son los elementos de todos los seres, y que el cielo en su conjunto es una armonía y un número”

De manera que, según esta filosofía, todos los entes y el mismísimo cosmos es un número racional. Quizá, el hecho que generó más controversia fue el descubrimiento, por los mismos pitagóricos alrededor del siglo V ac ([11]), de ciertos números extraños que no se pueden expresar como cocientes de enteros: los números irracionales. No se vislumbró su existencia debido a que los racionales cubren en buena medida nuestras necesidades. Ejemplo de ello es el número π . En la actualidad se sabe que es irracional, sin embargo en

su descubrimiento sólo se obtenían aproximaciones de él y eso era suficiente. Desde la educación elemental nos hablan de 3.1416 sin decirnos que sólo es un redondeo de π . Se toman los decimales necesarios hasta la exactitud deseada. En realidad, se usan números racionales parecidos a π , razón por la cual no se había notado su esencia diferente. Este fue el caso de algunos irracionales, como $\sqrt{5}$, número incluido en la razón dorada. Por otro lado, para el descubrimiento de los irracionales se requería mucha madurez y herramienta matemática

Históricamente, el descubrimiento de los irracionales fue unos cinco siglos antes de cristo en Grecia. Los pitagóricos aún creían, como ya se mencionó, que el universo estaba ordenado en función de los números racionales, únicos números existentes. Sin embargo, un adepto a sus ideas, Hipaso de Meta-ponto, descubrió $\sqrt{2}$, que no se puede expresar como cociente de enteros. Este evento echaba por tierra la filosofía pitagórica y su orden perfecto dado por los racionales. Fue tanto el miedo y la confusión generada que se intentó ocultar. Hipaso desapareció misteriosamente.

De aquí surgieron los números irracionales, que completan finalmente a \mathbb{R} . Es común usar la letra \mathbb{I} para los irracionales. Se comprende entonces que

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Un dato muy interesante, fue mostrado por el matemático alemán Georg Cantor en 1891: existe una cantidad más grande de irracionales que racionales. El método usado es conocido, en su honor, como “diagonal de Cantor”. Lo anterior, dio pie al desarrollo nuevas teorías referentes a la existencia de “infinitos” de diferente tamaño.

Desde su aparición, el uso de los números hizo evidente ciertas propiedades inherentes a ellos. El hecho de sumar 5 ovejas mas 7 ovejas, es lo mismo que sumar 7 ovejas y 5 ovejas. A lo largo de los siglos se han recolectado todas las propiedades que nacieron junto con ellos y se han esquematizado y estudiado. Uno de los primeros fue el matemático griego Euclides (325 ac-265 ac). Él no sólo realizó una síntesis de los conocimientos geométricos de su época, además exhibió la manera, que aún hoy, rige la contrucción de estructuras matemáticas. En realidad, Euclides consagró este método que ya existía. Su obra principal *Elementos*, empieza con una lista de definiciones (incluyó punto y recta); después, agregó ciertos enunciados “verdaderos” y les llamó: nociones comunes y postulados. La veracidad de tales enunciados,

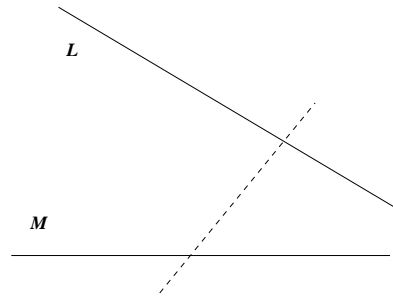


Figura 3.1 Postulado V de Euclides

estaba subordinada a la experiencia con la realidad, con la vida cotidiana. Nadie puede dudar de lo “verdadero” que resulta ser “el todo es mayor que cualquiera de sus partes” ó “por dos puntos pasa una sola recta”. La gran controversia empezó cuando se analizaron con cuidado sus definiciones y postulados. En el caso de punto y recta, sus definiciones acarrearón innumerables contradicciones. Por otro lado, de los postulados, el V es digno de mención:

“ Si una recta secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores, la suma de los cuales sea menor que dos ángulos rectos; las dos rectas, suficientemente alargadas se cortarán en el mismo lado”

Una representación geométrica se encuentra la figura 3.1. Si prolonga las rectas L y M ¿de qué lado se intersectarán? Eso es evidente. Por eso se consideró dentro de las “verdades” indudables. Sin embargo, hubo muchas personas que pensaron era un teorema, un enunciado que requería una demostración, que era consecuencia, tal vez, de los otros cuatro postulados y las nociones comunes. El resultado fue devastador: nadie lo logró. Por más de un milenio y medio, se hicieron intentos infructíferos. Las dudas sobre si era un teorema y no un postulado, se cambió en el siglo XIX, por otras peores: ¿será verdadero? ¿nuestros ojos podrían habernos engañado? Algunos aventureros, propusieron desde su alcoba, negar el enunciado y ver qué pasaba. El matemático ruso Nikolái Ivánovich Lobachevski, por su parte, dejó las mismas nociones comunes, los cuatro postulados y la negación del V (en su forma: por un punto exterior a una recta hay más de una paralela), y con sorpresa cayó en la cuenta de que había construido otra geometría igual de válida que la de Euclides. Este tipo de geometría no euclidiana, se llama

hiperbólica. Existen aplicaciones de dicha geometría en problemas reales, como la curvatura del espacio de Albert Einstein. En efecto, nuestros ojos nos engañaron, la geometría euclidiana es útil en espacios pequeños comparados con las dimensiones del universo.

Posteriormente, este asunto geométrico, marco el futuro de toda la matemática. Una organización axiomática era necesaria, incluso, para estudiar los números reales, pero de tal forma que no hubiese controversia como la del postulado V. Como es usual, muchas personas contribuyeron a este proceso: Dedekind, Peano, Cantor, Hilbert, etc. A finales del siglo XIX ya se tenía, finalmente, una idea muy clara de la estructura de los números reales.

La historia anterior deja varias enseñanzas, para nuestro caso, muy importantes:

1. No debemos confiar totalmente en nuestros sentidos
2. Que una proposición P , puede ser parte de una estructura matemática y $\neg P$ ser parte de otra teoría, sin que exista contradicción alguna.
3. No es necesario definir siempre los términos sobre los cuales se va a trabajar en matemáticas. Ejemplo de ello: conjunto, recta, punto, etc.
4. Para la construcción de estructuras matemáticas es necesario empezar con algo, pensar en algo como verdadero (axiomas). Los enunciados que se proporcionen no es necesario que sean comprobables con la experiencia. Basta con decir que los tomaremos como verdaderos.

Existen varios modos de realizar un estudio sobre los números reales. Una de ellas, es una forma constructiva: se empieza considerando un sistema axiomático en términos de conjuntos; se definen los naturales y a partir de ellos se construyen todos los números. Sin embargo, dicha visión requiere un amplio conocimiento de la teoría de conjuntos, lo cual se encuentra fuera de los propósitos de este libro. Además, en caso de ser el primer contacto con cierto grado de formalidad, la mejor manera de empezar a estudiar a \mathbb{R} es considerarlo desde el principio, como si hubiésemos presenciado la llegada de varios papiros dentro de una botella a la orilla del mar, donde se plantea la existencia de \mathbb{R} junto con las operaciones suma (adición) y multiplicación (producto) satisfaciendo ciertas propiedades llamadas axiomas. Así es como aborda el estudio este texto. Fingir que no conocemos nada, sólo lo dicho en

los papiros. Empezar casi de cero y construir, fundamentar, dar sustento a todas las operaciones y propiedades que conocemos. Algunas veces se olvida dicho método y llegamos a la desesperación. ¿Porqué se debe justificar cada paso? Es la pregunta más frecuente. No se puede negar que la forma iniciar el estudio de esta materia es extraña. Lo cierto es que, la numeración, como ya se dijo, surgió a partir de necesidades cotidianas y sabemos que se cumplen muchas propiedades. El asunto es que existieron personas que distinguieron, enumeraron y esquematizaron esas propiedades ya probadas por la experiencia y las colocaron como objeto de estudio. Lo que se descubrió es muy interesante: con pocas proposiciones es posible dar explicación a todas las propiedades conocidas y que existen otras propiedades, difíciles de percibir (supremo), pero muy importantes. Se trata entonces de destruir el edificio de las matemáticas y reconstruirlo (¿en tres días?) desde los cimientos (axiomas).

Se entiende ahora la frase de Jonathan Swift:

”Hubo una vez un ingeniosísimo arquitecto que había concebido un método nuevo para edificar casas, empezando por el tejado y prosiguiendo hacia abajo hasta los cimientos”

3.2. Axiomas de campo

3.2.1. Antes de empezar

El contenido esta dirigido a estudiantes de primeros semestres universitarios, así que este material constituye su primer contacto con la matemática formal. Conviene dar algunas precisiones. Durante el periodo universitario, en las Facultades de Ciencias, la labor de los profesores de matemáticas se reduce principalmente a justificar plenamente un enunciado. Buscan formas incuestionables de establecer resultados, siempre moviéndose con sumo cuidado dentro de cierto marco axiomático y sus consecuencias: teoremas, corolarios, lemas. Uno aprende que esas formas irrefutables de explicación y clarificación, en general se llaman demostraciones. Su base es la lógica¹, las tautologías, la lógica de proposiciones² y como ya se dijo, los teoremas obtenidos dentro del mismo modelo. etc. Se debe mencionar que, la demostración no es un proceso puramente matemático, es el modelo principal de la ciencia. Aún así, es útil usar algunos procesos mentales o razonamientos coloquiales, aquellos que fueron base en la esquematización de la lógica. De hecho el principal problema que he logrado observar en los estudiantes, empieza al momento de pensar que la matemática y sus demostraciones, son cosas ajenas al pensar ordinario. Nada más alejado de la realidad.

3.2.2. Axiomas de campo

El conjunto de números reales \mathbb{R} está formado por los números racionales e irracionales, en otras palabras, por todos los números que conocemos hasta ahora. A continuación enunciamos los axiomas de campo.

Se distinguen las operaciones suma y producto sobre pares de elementos en \mathbb{R} que satisfacen:

Axioma 1 (Cerradura). Para cada par $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $x + y \in \mathbb{R}$

(ii) $xy \in \mathbb{R}$

¹Principio de identidad, contradicción y tercero excluso.

²Por ejemplo: $\neg(p \Rightarrow q)$ es equivalente a $(p \wedge \neg q)$.

Axioma 2 (Conmutatividad). Para cada par $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(i) \quad x + y = y + x$$

$$(ii) \quad xy = yx$$

Axioma 3 (Asociatividad). Para cada $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(i) \quad x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$(ii) \quad x(yz) = (xy)z$$

Axioma 4 (Distributividad). Para cada $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$x(y + z) = xy + xz$$

Axioma 5 (Neutro aditivo). Existe un número real e tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}$:

$$x + e = x$$

Como primera observación hagamos ver que el número e planteado por el axioma anterior es único. Suponga que existe $e' \in \mathbb{R}$ que satisface la misma propiedad que e . Así que tenemos dos enunciados:

$$1. \text{ Para cualquier } x \in \mathbb{R} : x + e = x$$

$$2. \text{ Para cualquier } x \in \mathbb{R} : x + e' = x$$

De la primera proposición, sustituyendo x por e' se obtiene que $e' + e = e'$. Ahora, la segunda se satisface para cualquier real, en particular para e , por lo tanto se obtiene $e + e' = e$. Por la conmutatividad (vea axioma 2)

$$e' = e' + e = e + e' = e,$$

de lo cual $e = e'$.

Así que sólo existe un número real con la propiedad enunciada en el axioma anterior. Generalmente, tal número es denotado por 0 y llamado *cero*. Ahora es posible redactar el axioma 5 en una forma mas familiar:

$$\text{Para cada } x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$$

Axioma 6 (neutro multiplicativo). Existe un número real u tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}$:

$$xu = x$$

De manera análoga al axioma anterior, es posible mostrar que u es único (¡hágalo de ejercicio!). Tal elemento es denotado por 1 y es llamado *uno*. Es común encontrar el axioma del neutro multiplicativo redactado así:

$$\text{Para cada } x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x$$

Axioma 7 (inverso aditivo). $\forall x \in \mathbb{R}, \exists w \in \mathbb{R} : x + w = 0$

Axioma 8 (inverso multiplicativo). Existe por lo menos un número real diferente de cero. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces

$$\exists y \in \mathbb{R} : xy = 1$$

Hasta aquí el contenido de uno de los “papiros”, que por cierto, es frecuente llamar **axiomas de campo**. Con estas verdades traídas por el mar es suficiente para dar fundamento a una buena parte de la matemática básica. Una de las primeras tareas que nos hemos dado es demostrar la unicidad de ciertos números especiales: cero y uno. A partir de esto, es notable la dependencia lógica de los axiomas, por ejemplo, la existencia del neutro aditivo (axioma 5), con el axioma 7, referente a la existencia de inversos aditivos escrito en términos del cero.

Es posible ahora demostrar uno de los teoremas más usados en la matemática. Algunos lo conocen como **ley de cancelación para la suma**.

Teorema 3.2.1. Si $x + a = x + b$ entonces $a = b$

Demostración. Por el axioma 7, existe w tal que

$$x + w = 0. \tag{3.1}$$

Podemos sumar w a ambos lados de $x + a = x + b$, tenemos entonces que

$$w + (x + a) = w + (x + b).$$

Ahora, por la propiedad asociativa

$$\begin{aligned} (w + x) + a &= (w + x) + b \\ 0 + a &= 0 + b && \text{(vea ecc. 3.1)} \\ a &= b && \text{(neutro aditivo)} \end{aligned}$$

□

Corolario 3.2.1 (unicidad del inverso aditivo). Para cada número x existe un único número w , tal que $x + w = 0$ (vea axioma 7).

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Si existen reales w y w' tales que

$$x + w = 0 \wedge x + w' = 0,$$

entonces $x + w = x + w'$. Ahora, usando la ley de cancelación para la suma obtenemos $w = w'$. \square

Con razonamientos análogos, se prueba la **ley de cancelación del producto**:

Teorema 3.2.2. Si $xt = yt \wedge t \neq 0$ entonces $x = y$

Demostración. Ejercicio \square

Corolario 3.2.2 (unicidad del inverso multiplicativo). Para cada número x , diferente de cero, existe un número real único v tal que $xv = 1$ (vea axioma 8)

La unicidad del inverso aditivo para cada número, nos permite utilizar un símbolo para representarlo. Si x es un número real entonces su inverso aditivo es denotado por $-x$. En consecuencia, $x + (-x) = 0$.

Por otra parte, el inverso multiplicativo de x , también llamado recíproco de x , es denotado por $\frac{1}{x}$ ó x^{-1} . De manera que

$$x \cdot \frac{1}{x} = x \cdot x^{-1} = 1$$

Definición 3.2.1 (resta). El símbolo $x - y$, representa a la suma $x + (-y)$, es decir,

$$x - y = x + (-y).$$

Definición 3.2.2 (división). El símbolo $\frac{x}{y}$, representa a la multiplicación $x \cdot y^{-1}$, en otras palabras,

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$$

Es importante mencionar que lo que hasta ahora conocíamos por “resta” realmente es un símbolo que representa una suma. Por otro lado, la “división” es un símbolo que representa a una multiplicación.

3.3. Consecuencias de los axiomas de campo

Teorema 3.3.1. $\forall x \in \mathbb{R} : 0x = 0$

Demostración.

$$\begin{aligned} 0x &= 0x \\ (0 + 0)x &= 0x && \text{(neutro aditivo)} \\ 0x + 0x &= 0x && \text{(distributividad)} \\ 0x + 0x &= 0 + 0x \end{aligned}$$

Cancelando $0x$ en ambos lados, se obtiene

$$0x = 0.$$

□

Corolario 3.3.1. $1 \neq 0$.

Demostración. Suponga que $1 = 0$. Sea x cualquier número real. Entonces

$$x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$$

De manera que cualquier número real es cero. Esto es una contradicción al axioma 8, donde se afirma existe, por lo menos, un número real diferente de cero. □

Desde la educación secundaria en nuestro país, el dominio de las matemáticas gira en torno al conocimiento de frases del tipo: “lo que está sumando pasa restando” o “lo que está multiplicando pasa dividiendo” ¿Existe algún fundamento a ello? No creo que haya algún fundamento como tal, más bien, una observación. Suponga que tiene $a + b = c$.

$$\begin{aligned} (a + b) + (-b) &= c + (-b) && \text{(sumando } -b) \\ a + (b + (-b)) &= c - b && \text{(asociatividad)} \\ a + 0 &= c - b && \text{(inv. aditivo)} \\ a &= c - b && \text{(neutro aditivo)} \end{aligned}$$

Note que se empezó con $a + b = c$ (“ b está sumando”), de lo cual se obtuvo $a = c - b$ (“ b está restando”). Usted puede dar “fundamento” a la otra frase

mencionada. De manera que dichos enunciados sólo son consecuencias de los axiomas de los números reales y no al revés como piensa el estudiante. Existirá la posibilidad de utilizar estas técnicas para simplificar el trabajo algebraico, sin embargo, por lo mientras es importante mostrar que se tiene el conocimiento y dominio de los axiomas, de contrario se corre el riesgo de cometer errores graves. Considere el caso de la ecuación

$$\frac{a+b}{c} = d.$$

Dirán algunos que b esta “sumando” y por ende

$$\frac{a}{c} = d - b,$$

lo cual es falso.

Observación 3.3.1. Por el Corolario 3.2.1, referente a la unicidad del inverso aditivo, si se tiene

$$x + y = 0$$

entonces se debe concluir forzosamente que $y = -x$.

Observación 3.3.2. En cuanto a la unicidad del inverso multiplicativo (vea corolario 3.2.2), si se tiene

$$xy = 1$$

entonces necesariamente es cierto que $y = x^{-1}$.

Cabe la aclaración que no se trata de un burdo despeje. Seguramente ya notó la diferencia con los cursos de matemáticas anteriores. La idea fundamental es empezar con enunciados llamados axiomas que aceptamos como verdaderos porque de alguna manera la experiencia así nos lo indicó. Después, intentamos construir los resultados del álgebra tradicional, sin más herramienta que los axiomas y nuestra capacidad de razonamiento. No importa las técnicas vistas en otros niveles, precisamente el objetivo es mostrar, dar certeza y profundidad a lo ya conocido. Por ejemplo: ¿cómo explicar que $-0 = 0$ ó $0 - a = -a$? Expliquemos la veracidad de la primera expresión. En este caso, sabemos que

$$0 + 0 = 0$$

se debe concluir que $0 = -0$ (vea observación 3.3.1).
Aquí el razonamiento para la igualdad $0 - a = a$:

$$0 - a = 0 + (-a)$$

lo anterior por la definición de resta. Ahora bien, por la propiedad del cero

$$0 + (-a) = -a,$$

De donde se obtiene que: $0 - a = -a$.

Ahora, el teorema que contiene lo que en ocasiones suelen llamar “leyes de los signos”

Teorema 3.3.2. Para cualesquiera números reales a, b se tiene:

- (i) $-(-a) = a$
- (ii) $a(-b) = -ab$ (En particular $(-1)a = -a$)
- (iii) $(-a)(-b) = ab$

Demostración. (i): Sin lugar a dudas $-a$ y a son inverso aditivos, por lo tanto

$$(-a) + a = 0,$$

Por el Corolario 3.2.1 (vea también la observación 3.3.1), $a = -(-a)$.

(ii): Ejercicio.

(iii): Es una consecuencia de los incisos anteriores:

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= -[(-a)b] \\ &= -(-ab) \\ &= ab \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.3. Si a y b no son cero, entonces $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

Demostración. En este resultado juega un papel fundamental el corolario 3.2.2 y la observación 3.3.2, sobre la unicidad del recíproco. Basta con mostrar que $(ab)(a^{-1}b^{-1}) = 1$

$$\begin{aligned}
 (ab)(a^{-1}b^{-1}) &= a[b(a^{-1}b^{-1})] && \text{(asociatividad del producto)} \\
 &= a[b(b^{-1}a^{-1})] && \text{(conmutatividad)} \\
 &= a[(bb^{-1})a^{-1}] && \text{(asociatividad)} \\
 &= a(1 \cdot a^{-1}) && \text{(inv. mult.)} \\
 &= aa^{-1} && \text{(neutro mult.)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

□

El uso de paréntesis y corchetes, en general, es sólo para evitar confusión en el orden de las operaciones. En este caso, se colocan para dejar en claro que las operaciones suma y producto se efectúan por pares de números, es decir, son operaciones binarias. ¿Cómo hace la suma $5 + 4 + 2$? No suma los tres números al mismo tiempo, suma dos (asocia) y luego suma el restante: $5+4+2=9+2=11$ ó $5+4+2=5+6=11$. Así que, cuando sumamos o multiplicamos más de dos números, sin darnos cuenta, elegimos primero dos números, es decir, asociamos, luego sumamos o multiplicamos según sea el caso. Claro que en el futuro, cuando domine los fundamentos de la matemática podrá evitar esta situación tan engorrosa.

Tenemos la herramienta para demostrar una igualdad básica, que nos ha acompañado en la mayoría de cursos sobre matemáticas desde nuestra mas tierna infancia.

Teorema 3.3.4. Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, donde b y d no son cero, entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Demostración.

Por la definición de división

$$\begin{aligned}
 \frac{ad + bc}{bd} &= (ad + bc)(bd)^{-1} \\
 &= (ad)(bd)^{-1} + (bc)(bd)^{-1} && \text{(distributividad)} \\
 &= (ad)(b^{-1}d^{-1}) + (bc)(b^{-1}d^{-1}) && \text{(por teorema 3.3.3)}
 \end{aligned}$$

Conmutando y asociando de la misma forma que en el teorema anterior

$$\begin{aligned}
 &= (ab^{-1})(dd^{-1}) + (cd^{-1})(bb^{-1}) \\
 &= ab^{-1} + cd^{-1} && (dd^{-1} = 1 \text{ y } bb^{-1} = 1) \\
 &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} && (\text{def. división})
 \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.5. $ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$

Demostración. (\Rightarrow): Tenemos que $ab = 0$ y se debe mostrar que $a = 0 \vee b = 0$. Como trabajamos con proposiciones lógicas, hay dos casos para el número a , es cero o no es cero. Si $a = 0$, ya está probado lo que se quería. Si $a \neq 0$, entonces existe a^{-1} tal que $aa^{-1} = 1$. Ahora, multipliquemos por a^{-1} la igualdad $ab = 0$ resulta que

$$a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0$$

asociando

$$\begin{aligned}
 (a^{-1}a)b &= 0 \\
 1 \cdot b &= 0 \\
 b &= 0
 \end{aligned}$$

(\Leftarrow): Ejercicio. □

El teorema anterior dice que si un producto de números es cero, entonces uno de ellos o los dos son cero. Podemos plantear un problema que es muy común en todos los cursos de matemáticas. Para esto hace falta mencionar un par de cosas. Si n es un número natural, x^n es un símbolo que representa al producto de n veces x . Así, x^2 es lo mismo que $x \cdot x$. Por otro lado, ¿recuerda usted la propiedad distributiva? Es aquella propiedad que relaciona a la operación suma y producto:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Si coloca la misma propiedad al revés, es decir, $ab + ac = a(b + c)$, ¿le recuerda algo? Es lo que siempre han dado por llamar factorización. Bueno, suponga que quiere encontrar un número x que satisfaga

$$3x^2 - x = 0$$

Vea como se encuentra con lo poco que tenemos:

$$\begin{aligned}
 3x^2 - x &= 0 \\
 3x^2 + (-x) &= 0 && \text{(Def. de resta)} \\
 3x^2 + (-1 \cdot x) &= 0 && \text{(neutro aditivo)} \\
 3x^2 + (-1)(x) &= 0 && \text{(ley de signos)} \\
 3x(x) + (-1)(x) &= 0 \\
 (3x + (-1))x &= 0 && \text{(distributividad)} \\
 (3x - 1)x &= 0 && \text{(def. de resta)}
 \end{aligned}$$

En el último renglón, aparece el producto de los números $3x - 1$ y x igual a cero, según el teorema anterior $3x - 1 = 0$ ó $x = 0$. Entonces $x = \frac{1}{3}$ ó $x = 0$ (vea ejercicios). Sustituya cada uno de estos valores en la ecuación original y verifique que la hacen verdadera.

No siempre se pondrán todos los detalles como ahora se ha hecho, por lo pronto es importante para lograr un dominio total.

Ejercicios 4. Demuestra cada una de las siguientes proposiciones. En cada caso menciona el axioma o teorema usado.

1. Existe un único número real u (unicidad del neutro multiplicativo, vea Axioma 6) , tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} : xu = x$$

2. Demuestra la **ley de cancelación de producto**, que a la letra dice: Si $xt = yt \wedge t \neq 0$ entonces $x = y$.
3. Para cada número x , diferente de cero, existe único real v tal que $xv = 1$ (unicidad del recíproco. Se trata del corolario 3.2.2. Después de la demostración, también lea observación 3.3.2).

Sugerencia: use la ley de cancelación del producto.

4. Según el axioma 2, la suma es conmutativa, es decir, para cada par de números reales $x + y = y + x$. ¿Es cierto que para cada par de reales

$$a - b = b - a?$$

5. Si $a \neq 0$ entonces $a^{-1} \neq 0$
6. $(a^{-1})^{-1} = a$
7. $a(-b) = -ab$. En especial, lo anterior muestra que $(-1)a = -a$. ¿Porqué?

Sugerencia: utilice el axioma de distributividad, la propiedad del inverso aditivo para demostrar que

$$ab + a(-b) = 0.$$

8. Usando el material de este texto, muestra que $-(a - b) = b - a$

Observación 3.3.3. En este año, 2024, la inteligencia artificial en aplicaciones, está en un estado de desarrollo muy avanzado. Veamos, usé **ChatGPT**³ para obtener una demostración de que $-(a - b) = b - a$. Por error, pedí que mostrara $-(a - b) = a - b$ y resultó lo siguiente:

³ChatGPT es una aplicación de chatbot de inteligencia artificial desarrollada en 2022 por la empresa OpenAI, que se especializa en el diálogo.


**Tú**demuestra $-(a-b)=-a-b$, usando axiomas de reales**ChatGPT**

Para demostrar que $-(a - b) = -a - b$, podemos utilizar los axiomas de los números reales. Aquí está la demostración:

1. **Axioma de la existencia del inverso aditivo:** Este axioma establece que para cada número real a , existe un número real $-a$ tal que $a + (-a) = 0$.
2. **Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma:** Esta propiedad establece que para cualquier a, b y c reales, se cumple que $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Ahora, procedemos a demostrar $-(a - b) = -a - b$:

$$\begin{aligned} -(a - b) &= -(a + (-b)) && \text{(Reescribimos la resta como suma)} \\ &= -a + -(-b) && \text{(Por la propiedad distributiva)} \\ &= -a + b && \text{(Por el axioma del inverso aditivo)} \\ &= -a - b && \text{(Sumamos } b \text{ y } -b) \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que $-(a - b) = -a - b$ utilizando los axiomas de los números reales. 

Después, corregí:

**Tú**demuestra que $-(a-b)=b-a$ **ChatGPT**

Para demostrar que $-(a - b) = b - a$, podemos utilizar los axiomas de los números reales. Aquí está la demostración:

1. **Axioma de la existencia del inverso aditivo:** Este axioma establece que para cada número real a , existe un número real $-a$ tal que $a + (-a) = 0$.
2. **Propiedad conmutativa de la resta:** Esta propiedad establece que para cualquier a y b reales, se cumple que $a - b = -(b - a)$.

Ahora, procedemos a demostrar $-(a - b) = b - a$:

$$\begin{aligned} -(a - b) &= -a + b && \text{(Por la propiedad conmutativa de la resta)} \\ &= b - a && \text{(Por la propiedad conmutativa de la suma)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que $-(a - b) = b - a$ utilizando los axiomas de los números reales.



En ambos casos, incluso considerando mi error, las explicaciones dadas por la inteligencia artificial, resultan muy interesantes. ¿Qué opina del hecho? ¿Son incorrectas? ¿Por qué? ¿Te servirían para construir tu

propia demostración adaptándola al material de clase? Si revisara dicha demostración dentro del contexto del desarrollo de los temas en estas notas, mi primera objeción sería que en este libro nunca se habló de la propiedad conmutativa de la resta y además, dicho enunciado, obsérvelo bien: $a - b = -(b - a)$, es ni más ni menos lo que se quiere mostrar (sólo cambie a por b y viceversa). De manera que se estaría usando lo que se quiere mostrar, lo cual resulta incorrecto.

9. $a(b - c) = ab - ac$

10. Demuestra las siguientes fórmulas que forman parte de los llamados productos notables ⁴

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

11. Si $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, muestra que $a = 0 \vee b = 0$

12. Suponga que $a^3 = a$ y $a \neq 0$. Demuestra que $a = 1 \vee a = -1$.

13. $1^{-1} = 1$ y $(-1)^{-1} = -1$. En general $(-a)^{-1} = -a^{-1}$

14. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (multiplicación de fracciones). Como caso particular de la fórmula anterior, prueba que $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. Esta última expresión es muy útil en sumas especiales. Ejemplo:

$$\frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{1}{8} - \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8} - \frac{12}{8} = -\frac{11}{8}$$

15. El ejercicio anterior, hace ver en particular que los racionales son un conjunto cerrado bajo la multiplicación. Además, en una parte de esta sección se obtuvo una expresión que nos permite sumar fracciones. Si es observador, notará que en particular se mostró que la suma de racionales es racional. La pregunta natural es: ¿los irracionales son cerrados bajo la suma y producto? La respuesta es no.

⁴Note que se escribe con cierta ligereza la suma de tres números $a^2 + 2ab + b^2$ sin usar paréntesis. No olvide que en realidad se agrupa de dos en dos, siempre que haya confusión. Por ejemplo, si tiene $\frac{3}{4} + 1$, se entiende perfectamente. Sin embargo, si quieres indicar la división usando otro símbolo $3 \div 4$, debe escribirse como $\frac{3}{4} + 1 = (3 \div 4) + 1$, pues sin paréntesis, la operación, además de ser ambigua, no indica lo que queremos decir originalmente, esto es, dividir primero 3 entre cuatro y luego sumarle 1.

- a) Use el hecho de que $\sqrt{2}$ es irracional⁵ para probar que el conjunto de irracionales no es cerrado bajo suma y producto
- b) En general, pruebe que si $x \in \mathbb{Q}$ y $y \in \mathbb{I}$ entonces $x + y \in \mathbb{I}$.
16. Suponga que a, b, c y d son números reales diferentes de cero. En primer lugar muestra que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$. Posteriormente, fundamenta la regla de división de fracciones:
- $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$
17. $a = 0 \vee b = 0 \implies ab = 0$
18. Prueba que $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$. Además, $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$
19. $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$
20. Si $a^2 - b^2 = 0$ entonces $a = b \vee a = -b$. Usa lo anterior para encontrar todos los números reales tales que $a^{-1} = a$.
21. ¿Cuál es el resultado $20 \div 5 + 5$?

Ejercicios 5. Realiza lo que se indica

- Encuentra un ejemplo donde $a^4 = b^4$, pero $a \neq b$.
- Resuelve $3x - 1 = 0$, indicando los axiomas usados.
- Considera la siguiente expresión

$$\frac{\frac{x-a}{b} - fd}{x-d} = f$$

Naturalmente que $b \neq 0$, ¿qué valor no puede tomar x ? Despeja x , mencionando en cada paso el axioma usado y las restricciones necesarias.

⁵En el apéndice B se demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional. Por otro lado, puede usar la propiedad $\sqrt{x^2} = x$, aunque ésta se probará hasta el capítulo 5.

4. Demuestra que existe un número real x que satisface

$$\frac{x + 12}{3x^{-1}} = -5x^3 + 4x.$$

Sugerencia: despeja x y analiza las restricciones que van surgiendo. No se te olvide señalar, en cada paso los axiomas usados.

5. Resuelve la siguiente ecuación

$$\frac{(x^{-1} + 1)^{-1}}{1 + \frac{x^{-1} - 1}{x^{-1} + 1}} = x^2$$

3.4. Axiomas de orden de \mathbb{R}

Existe un subconjunto de números reales denotado por \mathbf{P} cuyos elementos satisfacen las siguientes propiedades:

- (a) Si $x, y \in \mathbf{P}$ entonces
 - (i) $x + y \in \mathbf{P}$
 - (ii) $xy \in \mathbf{P}$
- (b) $0 \notin \mathbf{P}$
- (c) Si x es un número real no cero, entonces ocurre una y sólo una de las siguientes proposiciones:
 - (i) $x \in \mathbf{P}$
 - (ii) $-x \in \mathbf{P}$

¿Dónde está el orden? Bueno, a partir de \mathbf{P} es posible definirlo. El usadísimo $x < y$, se lee “ x es menor que y ” y es un vil símbolo cuyo significado se da en términos de \mathbf{P} :

$$x < y \iff y - x \in \mathbf{P}.$$

De igual manera “ x menor o igual a y ”:

$$x \leq y \iff [y - x \in \mathbf{P} \vee x = y].$$

Por otro lado, $x > y$ se lee “ x es mayor que y ”, se usa cuando

$$x > y \iff x - y \in \mathbf{P}.$$

Note que si $x > 0$ si y sólo si $x - 0 = x \in \mathbf{P}$, ¿entiendes la razón de usar \mathbf{P} ? En realidad, \mathbf{P} es el conjunto de números positivos, también se usa el símbolo \mathbb{R}^+ para representarlo.

3.5. Consecuencias de los axiomas de orden

Teorema 3.5.1 (ley de tricotomía).

Si $x, y \in \mathbb{R}$, se satisface una y sólo una de las siguientes proposiciones:

(a) $x = y$

(b) $x < y$

(c) $x > y$

Demostración. Sea $s = x - y$. Si $s = 0$ entonces $x - y = 0$, de donde $x = y$. En este caso se cumple el inciso (a). ¿Por qué ya no se cumple ni (b) ni (c)? Si además de (a), se cumple (b) entonces $x = y$ y $x < y$ son verdaderas al mismo tiempo, en consecuencia $y - x \in \mathbb{P}$ y $y - x = 0$, o sea $y - x = 0 \in \mathbb{P}$, lo cual contradice el segundo axioma de orden. Ahora supongamos que $s \neq 0$. Según el tercer axioma de orden se satisface de manera excluyente que

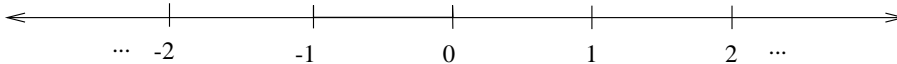
$$s \in \mathbf{P} \vee -s \in \mathbf{P}$$

Si $s \in \mathbf{P}$ entonces $x - y \in \mathbf{P}$, de lo cual $y < x$. Si $-s \in \mathbf{P}$ entonces $y - x \in \mathbf{P}$, por lo tanto $x < y$. □

El conjunto de números $x < 0$, se denomina conjunto de números negativos y es común usar el símbolo \mathbb{R}^- . De manera que

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}.$$

Hay una forma de representar **gráficamente números reales**, que para el caso de las relaciones de orden tiene mucha utilidad.



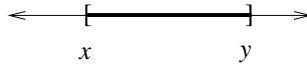
Es la típica recta graduada. Los positivos se encuentran del lado derecho del cero y los negativos del lado izquierdo del cero. Si x es menor que y ($x < y$) la representación de ambos números en la recta real sería:



En una buena parte de la literatura matemática es necesario considerar a todos los números entre x e y , inclusive. La definición conjuntual es

$$[x, y] = \{t \in \mathbb{R} : x \leq t \leq y\},$$

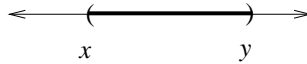
y es llamado intervalo cerrado. La representación gráfica en la recta real



Si no se considera a los extremos, se llama intervalo abierto

$$(x, y) = \{t \in \mathbb{R} : x < t < y\}$$

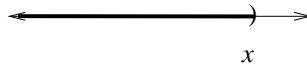
y se representa gráficamente



Otros conjuntos similares son los rayos o intervalos semi-infinitos. El conjunto

$$(-\infty, x) = \{t \in \mathbb{R} : t < x\},$$

tiene como representación



Algunos libros manejan $(-\infty, \infty)$ para referirse a \mathbb{R} . Muchas veces es más fácil analizar los conjuntos gráficamente que con sus definiciones algebraicas.

Ahora, algunas propiedades que nos permitirán manipular desigualdades, de una manera análoga a las igualdades.

Teorema 3.5.2. Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ entonces

- (a) Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$
- (b) $a + c < b + c \iff a < b$
- (c) Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$
- (d) Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$

Demostración. (a): Si $a < b$ y $b < c$ entonces $b - a, c - b \in \mathbb{R}^+$. Recuerde que \mathbb{R}^+ es cerrado bajo suma (vea sus axiomas), es decir, que si se suman dos elementos de \mathbb{R}^+ se obtiene nuevamente un elemento de \mathbb{R}^+ , por lo tanto $b - a + (c - b) \in \mathbb{R}^+$. Así pues,

$$b - a + (c - b) = c - a \in \mathbb{R}^+.$$

Según la definición, $c - a \in \mathbb{R}^+$, es equivalente a $a < c$.

(d): Si $a < b$ y $c < 0$, de igual manera que lo anterior $b - a, 0 - c \in \mathbb{R}^+$, en otras palabras $b - a, -c \in \mathbb{R}^+$. Ahora, utilizando la cerradura bajo multiplicación de elementos de \mathbb{R}^+ , $(b - a)(-c) \in \mathbb{R}^+$. En consecuencia $(b - a)(-c) = ac - bc \in \mathbb{R}^+$. Finalmente, $ac > bc$. □

Observación 3.5.1. La propiedad del inciso (a) es conocida como **transitiva**. El inciso (b), afirma que se pueden cancelar números en forma análoga a la ley de cancelación para la suma en la igualdad.

Aunque usted no lo crea, tan apreciado y atento lector, hasta ahora tenemos la posibilidad de dar fundamento al hecho de que $1 > 0$. De acuerdo a la ley de tricotomía, existen tres posibilidades excluyentes:

$$1 = 0 \vee 1 < 0 \vee 1 > 0.$$

la primera ya fue descartada por el corolario (3.3.1). Suponga que

$$1 < 0.$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por 1, que según el supuesto es negativo, la desigualdad se invierte, esto es

$$1 \cdot 1 > 0 \cdot 1,$$

de donde $1 > 0$, lo cual es una contradicción. Sólo es posible un caso: $1 > 0$.

Teorema 3.5.3. Sea a es un número real diferente de cero

(i) Si $a > 0$ entonces $a^{-1} > 0$

(ii) Si $a < 0$ entonces $a^{-1} < 0$

Demostración. (i): Suponga que la implicación planteada en este inciso es falsa, por lo tanto su negación es verdadera. De manera que

$$\neg(a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0)$$

es verdadera, pero ésta es equivalente⁶ a

$$a > 0 \wedge a^{-1} \leq 0$$

Como a^{-1} no es cero (¿porqué?), entonces tenemos

$$a > 0 \wedge a^{-1} < 0$$

Multiplicando la segunda desigualdad por el número positivo a :

$$aa^{-1} < a \cdot 0,$$

de donde se obtiene $1 < 0$, lo cual es falso. En resumen, la implicación planteada en (i) debe ser verdadera.

(ii): Ejercicio

El siguiente teorema hace uso de las definiciones de “menor o igual” y “mayor o igual”. Recuerde que el símbolo $x \leq y$ se puede usar cuando $x < y$ ó $x = y$. Así, $3 \geq 3$ pues es cierto que $3 = 3$. De forma análoga es el uso de \geq .

Teorema 3.5.4. $ab \geq 0 \iff (a \leq 0 \wedge b \leq 0) \vee (a \geq 0 \wedge b \geq 0)$

Demostración. (\Rightarrow): En primer lugar, analicemos el caso cuando $ab = 0$. Bajo estas condiciones $a = 0 \vee b = 0$. Si ambos son cero, el resultado es obvio, pues se tendría, por ejemplo, $a \leq 0 \wedge b \leq 0$. Ahora suponga que uno de ellos no es cero, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $b \neq 0$. Hay dos caminos:

1. $a = 0 \wedge b < 0$: conduce a $a \leq 0 \wedge b \leq 0$
2. $a = 0 \wedge b > 0$: conduce a $a \geq 0 \wedge b \geq 0$

En cualquier caso, se obtiene el resultado.

⁶Recuerde que $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

Ahora considere que $ab > 0$. Si $a > 0$ entonces $a^{-1} > 0$; multipliquemos $ab > 0$ en ambos lados por a^{-1} , se obtiene

$$a^{-1}(ab) > a^{-1}0$$

asociando

$$\begin{aligned}(a^{-1}a)b &> 0 \\ b &> 0\end{aligned}$$

Con lo cual se da $a > 0 \wedge b > 0$. Si supone que $a < 0$, en una forma análoga obtendrá $b < 0$.

(\Leftarrow) Ejercicio. □

Corolario 3.5.1. $ab < 0 \iff (a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)$

Demostración. Ejercicio.

Sugerencia: Puede recuperar la mayor parte de los elementos de la demostración anterior y adaptarlos a la nueva hipótesis. Por otro parte, si conoce algunos resultados del tipo $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ y usa el hecho de que

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$$

el corolario le será más fácil. □

Nos hemos excedido en símbolos. Hagamos cuatro ejemplos con números.

Ejemplo 3.5.1. Encuentra el conjunto solución de la siguientes desigualdades

(a) $4x - 3 < 0$

(b) $-15x > 2x - 3$

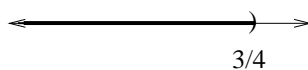
(c) $\frac{2}{x-1} < -3$

(d) $x^2 - 1 < 0$

Resolvamos (a):

$$\begin{aligned}
 4x - 3 &< 0 \\
 4x - 3 + 3 &< 0 + 3 \\
 4x &< 3 \\
 \frac{1}{4}(4x) &< 3\frac{1}{4} \\
 x &< \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

El conjunto de números reales que satisfacen (a), es decir el conjunto solución, puede quedar como lo indica el último renglón. Otra manera de expresarlo $\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{3}{4}\}$. Una forma más : $(-\infty, \frac{3}{4})$. Representado en la recta real



Claro que todas las formas son correctas.

(b):

$$\begin{aligned}
 -15x &> 2x - 3 \\
 -15x - 2x &> 2x - 3 - 2x \\
 -17x &> -3
 \end{aligned}$$

A continuación nótese que la desigualdad se invierte al momento de multiplicar por un número negativo

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{-1}{17}\right)(-17x) &< -3\left(\frac{-1}{17}\right) \\
 x &< \frac{3}{17}
 \end{aligned}$$

(c): Para este problema se tienen dos casos:

Caso 1: $x - 1 > 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{x-1} &< -3 \\
 (x-1)\frac{2}{x-1} &< -3(x-1) \\
 2 &< -3(x-1)
 \end{aligned}$$

la desigualdad no se invirtió porque $x - 1$ es positivo

$$\begin{aligned} 2 &< -3x + 3 \\ 3x &< 3 - 2 \\ x &< \frac{1}{3} \end{aligned}$$

En resumen, tenemos dos restricciones en este caso: $x - 1 > 0$ y $x < \frac{1}{3}$. Lo que nos conduce a $x > 1$ y $x < \frac{1}{3}$. Si usted grafica éstas desigualdades se dará cuenta que no se intersectan, en otras palabras, este caso no genera ninguna solución.

Caso 2: $x - 1 < 0$

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-1} &< -3 \\ (x-1)\frac{2}{x-1} &> -3(x-1) \end{aligned}$$

la desigualdad se invirtió pues $x - 1$ es negativo

$$\begin{aligned} 2 &> -3x + 3 \\ 3x &> 3 - 2 \\ x &> \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Las restricciones para éste caso: $x - 1 < 0$ y $x > \frac{1}{3}$. Equivalentemente, $x < 1$ y $x > \frac{1}{3}$. Si hace las gráficas en la recta real se dará cuenta que sí hay intersección: $(\frac{1}{3}, 1)$.

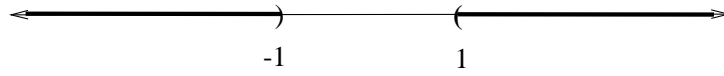
Finalmente, se unen las soluciones de todos los casos, como el primer caso no generó soluciones, todas las soluciones están contenidas en el intervalo abierto $(\frac{1}{3}, 1)$.

(d):

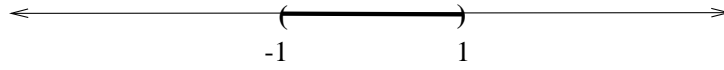
Aquí se puede aplicar el corolario 3.5.1. Veamos:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &< 0 \\ (x+1)(x-1) &< 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $(x+1 < 0 \wedge x-1 > 0)$ ó $(x+1 > 0 \wedge x-1 < 0)$. En forma equivalente, $(x < -1 \wedge x > 1)$ ó $(x > -1 \wedge x < 1)$. Es fácil darse cuenta en las gráficas de las desigualdades que, en el primer caso, no hay solución



Del segundo caso, después de obtener la intersección de las desigualdades $(x > -1 \wedge x < 1)$, se vislumbra el conjunto solución: $(-1, 1)$.



Ejercicios 6. 1. Define y grafica $[x, y)$, (x, ∞) y $[x, \infty)$

2. Suponga que $a \leq x \leq a$. Utiliza la ley de tricotomía para mostrar que $x = a$.

Nota: Es común escribir $a \leq b \leq c$ para referirse a la conjunción de las dos desigualdades $a \leq b$ y $b \leq c$.

3. a) Si $a < b$ y $c > 0$ demuestra que $ac < bc$

b) Suponga que $0 < x < y \wedge 0 < r < t$. Use la parte anterior (inciso (a)) para mostrar que $xr < yt$.

4. Suponga que $a < b$. Demuestra que $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Esto quiere decir, que entre dos números reales siempre hay, por lo menos, un número real. Esta propiedad se conoce como densidad de \mathbb{R} .

5. Si $a < 0$ entonces $a^{-1} < 0$

6. Si $0 < a \leq b$ entonces $a^{-1} \geq b^{-1}$

7. $(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0) \implies ab > 0$

8. $ab < 0 \iff (a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)$

9. Demuestra que si $x \in (-1, 4)$ entonces $\frac{x}{3} + 2 \in \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$

10. Muestra para cada $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$.

11. Resuelve las siguientes desigualdades:

a) $\frac{8x-1}{2} < -3$

b) $\frac{-5x+2}{-2} > 15$

c) $x-3 < 14-2x$

d) $-3x > \frac{6}{1-2x}$

e) $8x-1 < 4x-3 < 2x$

Nota: Escribe la desigualdad como una conjunción, resuelve cada parte por separado y luego intersectas (es una conjunción) soluciones.

$$f) 2x^2 - x \geq 0$$

Sugerencia: Utiliza el teorema 3.5.4.

$$g) (2x + 1)(x - 4) < 0$$

Capítulo 4

Valor absoluto

Una buena cantidad de conceptos importantes en matemáticas incluyen la idea de distancia entre números. El valor absoluto es una función que en cierto sentido, asigna a cada número real su distancia al cero. Se utilizan las barras $| |$ para denotarlo. La expresión $|x|$ se lee “el valor absoluto de x ”. En el caso de -5 y 5 se encuentran a una distancia de 5 unidades del cero, esto es $|-5| = |5| = 5$. Por otro lado, es frecuente leer expresiones $|x - a|$, como “la distancia entre x y a ”. Veamos la definición formal.

4.1. Definición y propiedades

Definición 4.1.1. Si x es un número real entonces

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Si x es un número, el valor absoluto según la definición tiene dos posibles valores: x ó $-x$. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$, por lo tanto $|x| \geq 0$. Por otra parte, si $x < 0$, entonces $|x| = -x$, pero $x < 0$ implica que $-x > 0$, en consecuencia $|x| > 0$. Así pues, **el valor absoluto de cualquier número siempre será positivo o cero** (vea figura 4.1).

Las siguientes propiedades son sencillas, pero traerán como consecuencia resultados de uso extensivo en cálculo diferencial e integral. Basta con que recuerde la definición de límite: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

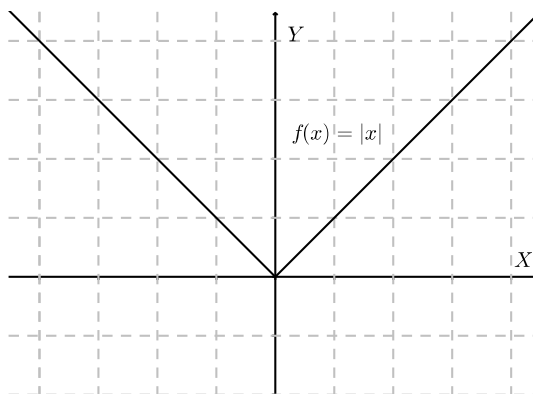


Figura 4.1 Gráfica del valor absoluto

Es necesario encontrar equivalencias y manejar algebraicamente expresiones del tipo: $|a| < c$ ó $|a| \geq c$.

Teorema 4.1.1. Si $x \in \mathbb{R}$ entonces

- (a) $-|x| \leq x \leq |x|$
- (b) $|x| = 0 \iff x = 0$

Demostración. El inciso (a) obliga a mostrar dos resultados: $-|x| \leq x$ y $x \leq |x|$.

Probemos ($-|x| \leq x$): Si $x \geq 0$ entonces $-x \leq 0$, de donde $-x \leq 0 \leq x$, equivalentemente $-x \leq x$. Ahora, según la definición de valor absoluto $|x| = x$. En resumen, $-x = -|x| \leq x$, por ende $-|x| \leq x$.

Ahora si $x < 0$, $|x| = -x$, equivalentemente $-|x| = x$, lo cual implica $-|x| \leq x$.

La parte $x \leq |x|$ se deja como ejercicio.

(b): La parte (\Leftarrow) es fácil, pues si $x = 0$, por definición de valor absoluto, se tiene $|x| = 0$.

Si $|x| = 0$, por el inciso (a) se tiene

$$-|x| \leq x \leq |x|,$$

en otras palabras $-0 \leq x \leq 0$, por lo tanto $x = 0$. □

El resultado siguiente hace uso del teorema 3.5.4 y corolario 3.5.1, date unos segundos para revisarlos.

Teorema 4.1.2. Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces

$$(a) \quad |xy| = |x||y|$$

$$(b) \quad |x^{-1}| = |x|^{-1} \quad (x \neq 0)$$

$$(c) \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$$

Demostración. (a): Es necesario considerar $xy \geq 0 \vee xy < 0$.

Supóngase que $xy \geq 0$. Por definición de valor absoluto $|xy| = xy$. Por otro lado, según el teorema 3.5.4, se debe tener que $x \geq 0 \wedge y \geq 0$ ó $x \leq 0 \wedge y \leq 0$.

Si ambos son positivos o cero entonces $|x| = x \wedge |y| = y$, por ende $|x||y| = xy$.

Sin embargo, ya sabemos que $|xy| = xy$, de donde $|xy| = |x||y|$.

Si ambos son negativos o cero, entonces $|x| = -x$ y $|y| = -y$, por lo tanto $|x||y| = xy$. Recuerde que ya conocíamos la igualdad $|xy| = xy$, así que $|xy| = |x||y|$.

Resta demostrar el resultado para $xy < 0$, pero se deja como ejercicio.

(b): Del axioma de inverso multiplicativo se sabe que $xx^{-1} = 1$. Entonces usando (a)

$$|xx^{-1}| = |x||x^{-1}| = 1,$$

el producto $|x|$ con $|x^{-1}|$ es 1, deben ser recíprocos, es decir $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.

(c): Es una consecuencia de (a) y (b), se deja como ejercicio. \square

Teorema 4.1.3. $|a| \leq c \iff -c \leq a \leq c$

Demostración. (\Rightarrow): Empezamos suponiendo que $|a| \leq c$ y con razonamiento llegar a que $-c \leq a$ y $a \leq c$.

Si $a \geq 0$ entonces $|a| = a$ y por hipótesis $a \leq c$. Sólo resta probar que $-c \leq a$, para ello note que $0 \leq a \leq c$, por lo tanto $0 \leq c$, es decir, $-c \leq 0$. De esta forma

$$-c \leq 0 \leq a.$$

Al aplicar la propiedad transitiva a la última expresión: $-c \leq a$.

Ahora bien, si $a < 0$ entonces $|a| = -a$, igual que en el caso anterior $-a \leq c$, lo cual es equivalente a $-c \leq a$. Resta probar que $a \leq c$. De $a < 0$, se obtiene $0 \leq -a$. De lo cual

$$a < 0 < -a \leq c,$$

y por transitividad $a \leq c$.

(\Leftarrow): Para esta parte supóngase que $-c \leq a \leq c$.

En forma similar a la implicación anterior, $a \geq 0$ trae como consecuencia $|a| = a$. Por hipótesis $a = |a| \leq c$ que es lo que deseábamos mostrar.

Por otro lado si $a < 0$, $|a| = -a$. Parte de nuestra hipótesis es $-c \leq a$, en otras palabras, $-a \leq c$. De manera que $|a| = -a \leq c$, o sea $|a| \leq c$. \square

Corolario 4.1.1. $|a| > c \iff -a > c \vee a > c$

Teorema 4.1.4. $|a| < c \iff -c < a < c$

Demostración. Ejercicio \square

Observación 4.1.1. Tenemos el material suficiente para demostrar la llamada **desigualdad triangular**

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

En realidad es consecuencia de los teoremas 4.1.1 y 4.1.3. A partir de

$$\begin{aligned} -|x| &\leq x \leq |x| \\ -|y| &\leq y \leq |y| \end{aligned}$$

se suman las desigualdades

$$\begin{aligned} -|x| - |y| &\leq x + y \leq |x| + |y| \\ -(|x| + |y|) &\leq x + y \leq |x| + |y| \end{aligned}$$

Por el teorema 4.1.3, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

A continuación se explican con detalle la solución a varios problemas. Son sencillos, aún así, estudialos con diligencia, ya que los problemas más complejos, se derivan en problemas muy semejantes.

Para una mejor comprensión, es **opcional** apoyarse en algún software que grafique¹.

¹GeoGebra es un software gratuito y liviano, que por el momento te servirá. En internet encontrarás las instrucciones necesarias con el fin de graficar

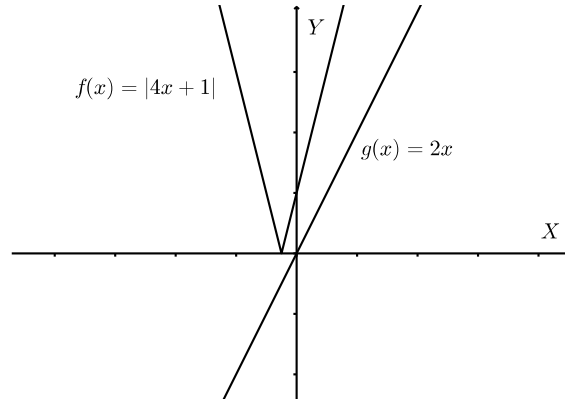


Figura 4.2

Ejemplo 4.1.1. Encuentra el conjunto solución de la ecuación $|1 - 7x| = 5$. Dado que el valor absoluto tiene dos posibles valores, el problema se traduce en dos ecuaciones:

$$1 - 7x = 5 \quad \text{ó} \quad -(1 - 7x) = 5.$$

Son ecuaciones fáciles de resolver. El conjunto solución es $\{-\frac{4}{7}, \frac{6}{7}\}$.

Ejemplo 4.1.2. Resuelve $|8x - 1| = x$.

Con la misma mecánica del ejemplo anterior, resultan dos ecuaciones:

$$8x - 1 = x \quad \text{ó} \quad -(8x - 1) = x.$$

Se dan dos posibles soluciones: $x = \frac{1}{7}$ y $x = \frac{1}{9}$. Pueden verificar por sustitución directa en la ecuación original que ambos valores satisfacen la igualdad.

Ejemplo 4.1.3. Encuentra los valores de x que satisfacen $|4x + 1| = 2x$ (vea figura 4.2). Proceda con el mismo razonamiento anterior y llegará a dos posibles soluciones: $x = -\frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{6}$. Sin embargo, si usted sustituye ambos valores en la ecuación original se dará cuenta que ninguno la satisface, es decir, el conjunto solución es vacío.

En términos gráficos, el problema de encontrar valores para los cuales las funciones $|4x + 1|$ y $2x$ son iguales, se traduce en localizar los lugares de intersección de las funciones. La figura 4.2, muestra con claridad las gráficas

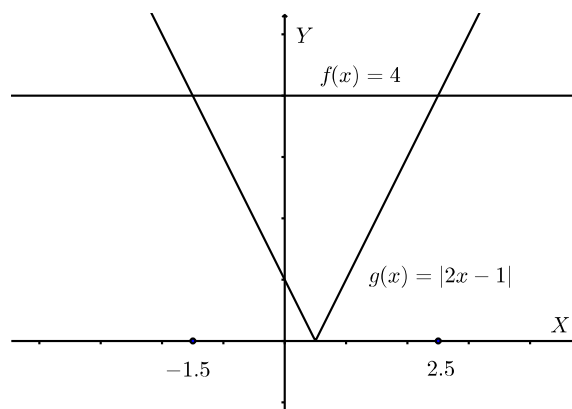


Figura 4.3

de las funciones $|4x + 1|$ y $2x$. Es claro que las funciones no se intersectan. Es otra explicación de la carencia de soluciones.

Ejemplo 4.1.4. Resuelve la desigualdad $|2x - 1| < 4$ (vea figura 4.3).

El teorema 4.1.4 se aplica directamente.

$$\begin{aligned} |2x - 1| &< 4 \\ -4 &< 2x - 1 < 4 \end{aligned}$$

sumando el número 1

$$\begin{aligned} -4 + 1 &< 2x - 1 + 1 < 4 + 1 \\ -3 &< 2x < 5 \end{aligned}$$

multiplique por $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} -3 \cdot \frac{1}{2} &< 2 \cdot \frac{1}{2}x < 5 \cdot \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} &< x < \frac{5}{2} \end{aligned}$$

De manera que el conjunto solución es: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Este resultado coincide con lo observado en la figura 4.3, el valor absoluto es más pequeño que la recta en el intervalo $(-1.5, 2.5)$.

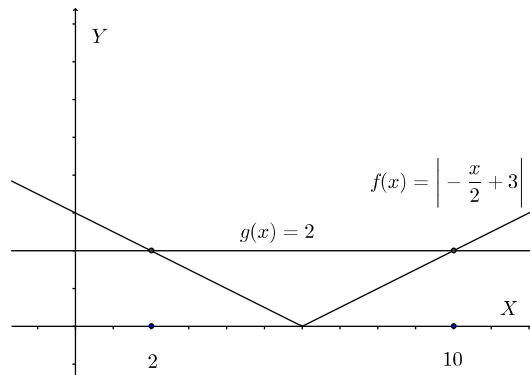


Figura 4.4

Ejemplo 4.1.5. Encuentra el conjunto solución de la inecuación

$$\left| -\frac{x}{2} + 3 \right| > 2.$$

Según la gráfica en la figura 4.4, el valor absoluto se encuentra por arriba de la recta, cuando $x < 2$ y $x > 10$, lo cual será comprobado por el razonamiento algebraico. Revise con cuidado el corolario 4.1.1. Resulta que

$$-\frac{x}{2} + 3 > 2 \vee -\left(-\frac{x}{2} + 3\right) > 2.$$

La disyunción indica que se pueden obtener soluciones de la inecuación original en ambas desigualdades, por lo cual, solucionaremos cada desigualdad y al último uniremos sus soluciones.

$$\begin{aligned} -\left(-\frac{x}{2} + 3\right) &> 2 \\ \frac{x}{2} - 3 &> 2 \\ \frac{x}{2} &> 2 + 3 \\ \frac{x}{2} &> 5 \\ x &> 10 \end{aligned}$$

La desigualdad $-\frac{x}{2} + 3 > 2$, trae como soluciones $x < 2$. En resumen, tenemos

$$x > 10 \vee x < 2.$$

La solución escrita en forma de intervalos: $(10, \infty) \cup (-\infty, 2)$.

Ejercicios 7. 1. Demostrar que si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces

a) $x \leq |x|$

b) $|-x| = |x|$

c) $|x - y| = |y - x|$

d) $|x - y| \leq |x| + |y|$ (aplica la desigualdad triangular)

e) $|x| - |y| \leq |x - y|$ (usa $|x| = |x - y + y|$ y luego la desigualdad triangular)

f) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (Obtén la desigualdad para $|y| - |x|$, semejante al inciso anterior, luego aplica el teorema 4.1.4)

2. Suponga que $xy < 0$. Utiliza solamente la definición de valor absoluto para probar que $|xy| = |x||y|$.

Sugerencia: apóyate en el corolario 3.5.1

3. Prueba que $|x|^2 = x^2$.

4. Suponga que $m, b \geq 0$. Muestra que $|mx^2 + b| = mx^2 + b$, para cualquier x .

5. Muestra que $|a| < c \iff -c < a < c$ (hágalo análogamente al teorema 4.1.3)

6. Indica la proposición falsa:

(i) $|a - 1| < 3$ implica que $-2 < a < 4$

(ii) $|a^2| = a^2$

(iii) $|-2a^2 - 1| = 2a^2 - 1$

(iv) $|a - b| = |b - a|$

7. Si $|x - 3| < 1$ entonces $|x + 3| < 7$

8. La desigualdad triangular afirma que para cada par de números reales x, y ocurre que

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

¿Qué condiciones deben satisfacer x, y para que se obtenga la igualdad? Una vez resuelto el problema, prueba con valores particulares tu conclusión.

9. Se tienen dos desigualdades

$$|2x + 3| < 0.1 \text{ y } |y - 2| < 0.01.$$

Deteminar si es falso o verdadero que $2x - y < -6$

10. Suponga que $x^2 + y^2 \leq 1$.

a) Muestra que $x^2 \leq x^2 + y^2$

b) Utiliza el inciso anterior, para demostrar $|x| \leq 1$ (análogamente $|y| \leq 1$).

Sugerencia: Suponga lo contrario, es decir $|x| > 1$ y llegue a una contradicción.

c) Ahora, aplica la desigualdad triangular a las desigualdades del inciso anterior, para dar una prueba de que $|x + y| \leq 2$.

11. Encuentra el conjunto solución de la ecuación $\left| \frac{1-x}{3} + 2 \right| = 5$

12. Resuelva la siguiente inecuación

$$\left| \frac{1-2x}{3} \right| > x.$$

13. Encuentre el conjunto solución de

$$|4x - 1| < |1 - x|.$$

Sugerencia: Si utiliza el teorema 4.1.4 obtendrá

$$\left[-|1-x| < 4x-1 \right] \wedge \left[4x-1 < |1-x| \right]$$

Solucione cada corchete por separado, como lo indican los ejemplos resueltos. Al final, interseque (es una conjunción) sus soluciones.

14. (**Opcional**) Considere las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en la figura 4.5 sobre el intervalo $[-1, 2]$. ¿En que valores de x , $f(x) \leq g(x)$? ¿Y los valores x tales que $f(x) \geq g(x)$?

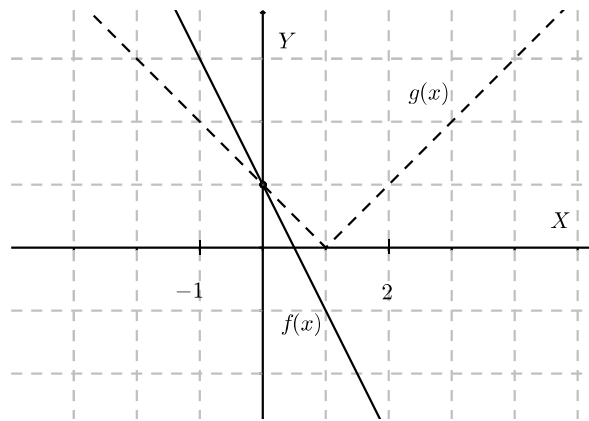


Figura 4.5

Capítulo 5

Raíz cuadrada

¿Quién no ha trabajado con la raíz cuadrada? Es un concepto que no sólo es menestér de ciencias exactas. Se trabaja en economía, administración de empresas, contabilidad, etc. En esta parte se presenta su definición formal y algunas propiedades.

5.1. Definición de raíz cuadrada y propiedades

Teorema 5.1.1. Suponga que $a, b \geq 0$.

$$a^2 = b^2 \iff a = b$$

.

Demostración. (\Rightarrow):

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 \\ a^2 - b^2 &= 0 \\ (a + b)(a - b) &= 0 \end{aligned}$$

El producto de $a + b$ y $a - b$ es cero, entonces $a + b = 0$ ó $a - b = 0$. Si $a = b$, pues la implicación esta demostrada. Sólo resta el caso en que $a = -b$. La hipótesis inicial marca que $b \geq 0$, equivalentemente, $-b \leq 0$, ahora observe con cuidado

$$0 \leq a = -b \leq 0$$

por ende $0 \leq a \leq 0$, de donde $a = 0$. Como $a = -b$ y $a = 0$, entonces $b = 0$, esto es, $a = b = 0$.

(\Leftarrow):

$$\begin{aligned} a &= b \\ a \cdot a &= a \cdot b \\ a^2 &= a \cdot b \end{aligned}$$

como $a = b$, entonces

$$\begin{aligned} a^2 &= b \cdot b \\ a^2 &= b^2 \end{aligned}$$

□

Ahora, por otro lado, suponga que $a, b \geq 0$ y $a^2 = b$. El teorema anterior nos permite deducir, sin duda, que a es el único número mayor o igual a cero cuyo cuadrado es b . En efecto, supongamos la existencia de $a' \geq 0$ tal que $(a')^2 = b \wedge a^2 = b$. Se tiene entonces $a^2 = (a')^2$. Tenemos las hipótesis del teorema anterior, por lo tanto $a = a'$.

La unicidad de a con respecto a la condición $a^2 = b$, permite ponerle nombre, a es la **raíz cuadrada** del número b y se denota por $a = \sqrt{b}$.

La raíz cuadrada se definió a partir de la expresión $a^2 = b$, lo cual limita a b sólo a números mayores o iguales a cero, en otros palabras, **sólo tienen raíz cuadrada los números mayores o iguales a cero**.

Suponga que a es la raíz de b ($a \geq 0$). Operaciones sencillas harán notar que $(-a)^2 = b$, pero $-a \leq 0$. También hay un modo de referirse a $-a$: raíz cuadrada negativa de b .

Teorema 5.1.2. Si x es un número real entonces

- (a) $(\sqrt{x})^2 = x$
- (b) $\sqrt{x^2} = |x|$

Demostración. (a): Por definición de raíz es obvio.

(b): $|x|$ es un número real mayor o igual a cero. Observe que

$$\begin{aligned} |x|^2 &= |x||x| \\ &= |xx| \\ &= |x^2| \end{aligned}$$

Sin embargo, $x^2 \geq 0$, por lo tanto

$$|x|^2 = x^2$$

Por definición de raíz $|x| = \sqrt{x^2}$. □

Teorema 5.1.3. Si $x, y \geq 0$ entonces

(a) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

(b) $\sqrt{x^{-1}} = (\sqrt{x})^{-1}$ ($x \neq 0$).

(c) $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ ($y \neq 0$).

Demostración. (a):

$$(\sqrt{x}\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x}\sqrt{y})(\sqrt{x}\sqrt{y})$$

asociando

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{x})^2(\sqrt{y})^2 \\ &= xy \end{aligned}$$

$\sqrt{x}\sqrt{y}$ es un número que elevado al cuadrado resulta xy , de acuerdo a la definición de raíz

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$$

(b): Por la propiedad del recíproco

$$xx^{-1} = 1$$

de donde

$$\sqrt{xx^{-1}} = \sqrt{1}$$

del inciso (a)

$$\sqrt{x}\sqrt{x^{-1}} = 1$$

El producto de \sqrt{x} y $\sqrt{x^{-1}}$ es 1, entonces deben ser recíprocos, es decir $\sqrt{x^{-1}} = (\sqrt{x})^{-1}$.

(c): Es consecuencia de los incisos anteriores. Se recomienda elevar al cuadrado el cociente $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ y demostrar que se obtiene $\frac{x}{y}$. □

La raíz cuadrada se distribuye en productos y cocientes, pero no se distribuye en sumas, esto es, **no siempre es cierto que** $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Teorema 5.1.4. Si $a^2 \leq b^2$ entonces $|a| \leq |b|$

Demostración. Si $a = 0$ el teorema es obvio.

Supóngase que $a \neq 0$. Naturalmente $|a| > 0$. Demostraremos el contrareciproco¹ del teorema, o sea

$$|a| > |b| \implies a^2 > b^2.$$

$$\begin{aligned} |a| &> |b| \\ |a||a| &> |a||b| \\ |a^2| &> |ab| \\ a^2 &> |ab| \end{aligned}$$

Por otro lado, en forma similar

$$\begin{aligned} |a| &> |b| \\ |a||b| &> |b||b| \\ |ab| &> b^2 \end{aligned}$$

tenemos $a^2 > |ab| > b^2$, por ende $a^2 > b^2$. □

Corolario 5.1.1. $0 \leq a \leq b \implies \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Demostración. Ejercicio □

Ya tenemos las herramientas necesarias para resolver desigualdades un poco más complejas.

Ejemplo 5.1.1. Encuentra el conjunto solución de la desigualdad (vea figura 5.1)

$$x^2 + 7x - 15 < 2x + 1.$$

No haremos muchos comentarios. La idea es que en ejercicios semejantes intentes hacer lo mismo. Es conveniente que el coeficiente del término

¹Recuerde que el contrareciproco de $(p \implies q)$ es $(\neg q \implies \neg p)$ y son proposiciones equivalentes

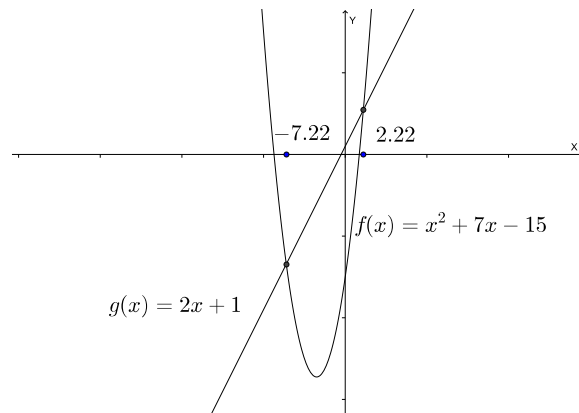


Figura 5.1

cuadrático sea uno. Si no lo es, divides ambos lados de la desigualdad entre tal coeficiente para lograr que sea uno. Ten cuidado con las multiplicaciones y divisiones de números negativos en desigualdades, recuerda que las desigualdades se invierten. Se usa una buena cantidad de teoremas de estas notas y una técnica conocida como “completar cuadrados”, que puedes encontrar en algunos libros de álgebra elemental.

Según la gráfica, la parábola se encuentra por debajo de la recta, en el intervalo $(-7.22, 2.22)$. Hagámoslo algebraicamente.

$$\begin{aligned}
 x^2 + 7x - 15 &< 2x + 1 \\
 x^2 + 7x - 2x &< 1 + 15 \\
 x^2 + 5x &< 16 \\
 x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 &< 16
 \end{aligned}$$

Se utiliza la bien conocida técnica de completar cuadrados

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 < 16 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 &< 16 + \frac{25}{4} \\ \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 &< \frac{89}{4} \\ \sqrt{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2} &< \sqrt{\frac{89}{4}} \\ \left|x + \frac{5}{2}\right| &< \frac{\sqrt{89}}{2} \end{aligned}$$

Por el teorema 4.1.4

$$-\frac{\sqrt{89}}{2} < x + \frac{5}{2} < \frac{\sqrt{89}}{2}$$

restando $\frac{5}{2}$

$$-\frac{\sqrt{89}}{2} - \frac{5}{2} < x + \frac{5}{2} - \frac{5}{2} < \frac{\sqrt{89}}{2} - \frac{5}{2}$$

Simplificando

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{89}}{2} - \frac{5}{2} &< x < \frac{\sqrt{89}}{2} - \frac{5}{2} \\ \frac{-\sqrt{89} - 5}{2} &< x < \frac{\sqrt{89} - 5}{2} \end{aligned}$$

Los valores aproximados $-7.22 < x < 2.22$. Otra manera de expresarlo $(-7.22, 2.22)$. Estos valores corresponden a la idea gráfica que obtuvimos desde el principio.

Ejemplo 5.1.2. Encuentra el conjunto solución de

$$2x^2 - 3 > -2x$$

Veamos como proceder en este caso

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3 &> -2x \\ 2x^2 + 2x &> 3 \end{aligned}$$

ahora dividamos entre 2

$$\begin{aligned} x^2 + x &> \frac{3}{2} \\ x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 &> \frac{3}{2} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 &> \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 &> \frac{7}{4} \\ \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} &> \sqrt{\frac{7}{4}} \\ \left|x + \frac{1}{2}\right| &> \frac{\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

En razón del corolario 4.1.1

$$x + \frac{1}{2} > \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{ó} \quad -(x + \frac{1}{2}) > \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Son desigualdades que aportan soluciones diferentes de la desigualdad original, así que las resolveremos por separado y uniremos sus soluciones.

La primera, prácticamente ya está terminada

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2} &> \frac{\sqrt{7}}{2} \\ x &> \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2} \\ x &> \frac{\sqrt{7} - 1}{2} \\ x &> 0.82 \end{aligned}$$

A la segunda la puedes multiplicar por -1 y se transforma en $x + \frac{1}{2} < -\frac{\sqrt{7}}{2}$. No es difícil llegar a $x < -1.82$. Una forma de escribir la solución es $(0.82, \infty) \cup (-\infty, -1.82)$.

5.2. La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

Este pequeño apartado lo usaré para obtener, con las herramientas desarrolladas, la famosísima fórmula general.

La ecuación del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a \neq 0$ es llamada ecuación cuadrática. Construiremos una fórmula para encontrar los valores x que la satisfacen.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

multipliquemos por a^{-1}

$$\begin{aligned} a^{-1}(ax^2 + bx + c) &= a^{-1}0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

Si $b^2 - 4ac \geq 0$, es posible sacar raíz en ambos lados

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} &= \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ \left|x + \frac{b}{2a}\right| &= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

el valor absoluto tiene dos posibles valores, entonces

$$\begin{aligned} x + \frac{b}{2a} &= \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2.1. Resuelve la ecuación

$$x + 2x^{-1} + x^{-1}(2x + 3) = 8x^{-1}.$$

Se simplificará la expresión si multiplicamos por x

$$x(x + 2x^{-1} + x^{-1}(2x + 3)) = x(8x^{-1})$$

$$x^2 + 2 + (2x + 3) = 8$$

$$x^2 + 2x + 5 = 8$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Naturalmente se trata de una ecuación cuadrática, donde $a = 1$, $b = 2$ y $c = -3$.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)}$$

Sin duda, $x = \frac{-2 \pm 4}{2}$, de donde $x = 1$ ó $x = -3$.

Ejercicios 8. 1. Demuestra que $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Sugerencia: Como se vio en la sección, será suficiente con elevar al cuadrado $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ y verificar que el resultado es $\frac{x}{y}$.

2. a) Proporciona números positivos x y y tales que $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
 b) Suponga que $x, y \geq 0$. ¿Qué condiciones deben cumplir x e y para que satisfagan la igualdad $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$?

3. Demuestra que $0 \leq a \leq b \implies \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ (escribe $a = \sqrt{a^2}$ y aplica el teorema 5.1.4)

4. Suponga que $0 < a < b$.

(a) Prueba que $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$

(b) Además, muestra que Prueba que $a < \sqrt{ab} < b$.

5. Muestra que $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Sugerencia: recuerda que $x^2 \leq x^2 + y^2$

6. Resuelve las siguientes desigualdades

a) $1 - x < x^2 - 2x < x + 4$

b) $|x^2 - 4x - 8| < x + 6$

7. Encuentra el conjunto solución de

$$2(x^{-1} + 3) + \frac{1}{x^{-1}} = 2x - x^{-1}$$

8. Considera la expresión $A = \sqrt{1 + \left[\frac{-2x}{1-x^2} \right]^2}$

a) Simplifica A

b) ¿Cuál sería el resultado de A si $x > 1$? ¿Y si $0 < x < 1$?

Sugerencia: La simplificación debió quedar $A = \frac{x^2 + 1}{|1 - x^2|}$

Capítulo 6

Inducción matemática

La inducción matemática es un tipo de demostración que permite probar una cantidad infinita numerable de proposiciones \mathbf{P}_i , donde generalmente, $i \in \mathbb{N}$. Se apoya en el hecho de que cada número natural puede ser construido mediante la suma sucesiva del número 1. En realidad, lo anterior, es una forma un tanto informal de describir a los naturales. El concepto de conjunto inductivo, permite dar formalidad a tal descripción. La inducción matemática es un principio, un teorema cuya demostración se basa en la idea de conjunto inductivo.

6.1. Principio de inducción y ejemplos

Definición 6.1.1. Un conjunto \mathcal{S} es llamado inductivo si satisface las dos propiedades siguientes:

- (a) $1 \in \mathcal{S}$
- (b) Si $x \in \mathcal{S}$ entonces $x + 1 \in \mathcal{S}$

No es difícil convencerse de que existen muchos subconjuntos de reales inductivos. Un ejemplo es nuestro \mathbb{R}^+ .

Definición 6.1.2. El conjunto de números naturales es la intersección de todos los conjuntos inductivos.

Es posible que consideres un poco exagerada la definición de número natural, pero en cierto momento de la historia fue necesaria una definición de tal índole. El conjunto \mathbb{N} ya tenía nombre y símbolo, sin embargo ahora

conocemos una descripción más adecuada y manejable. Queda como ejercicio mostrar que \mathbb{N} es también inductivo.

Teorema 6.1.1 (Principio de inducción matemática). Si \mathcal{T} es un subconjunto de números naturales que tiene dos propiedades

1. $1 \in \mathcal{T}$
2. $n \in \mathcal{T}$ implica $n + 1 \in \mathcal{T}$

entonces $\mathcal{T} = \mathbb{N}$

Demostración. El primer lugar, se menciona que $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{N}$. Por otro lado, es claro que las propiedades de \mathcal{T} lo colocan como inductivo. La definición de \mathbb{N} , como intersección de todos los conjuntos inductivos, lleva a $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{T}$. En resumen $\mathcal{T} = \mathbb{N}$. \square

La pregunta clave es: ¿cómo hacer demostraciones por inducción matemática?

En primer lugar, se debe distinguir una proposición $\mathbf{P}(n)$ establecida para cada natural $n \geq n_1$ ($n_1 \in \mathbb{N}$); después deben demostrarse dos cosas:

- (I) $\mathbf{P}(n_1)$ es verdadera
- (II) $\mathbf{P}(k)$ implica $\mathbf{P}(k + 1)$

En general, $n_1 = 1$. A la proposición $\mathbf{P}(k)$ usualmente se le denomina hipótesis de inducción.

Ejemplo 6.1.1. Suponga $x \geq 1$. Demuestra por inducción matemática que

$$\forall n \in \mathbb{N} : x^n \geq 1$$

En este caso

$$\mathbf{P}(n) : x^n \geq 1.$$

Se desea establecer la veracidad para cualquier número natural, por lo cual $n_1 = 1$. Vayamos por partes:

- (I) : $\mathbf{P}(1)$ es verdadera.
Según lo dado $\mathbf{P}(1) : x^1 \geq 1$. Como $x^1 = x$ y por hipótesis $x \geq 1$, entonces $\mathbf{P}(1)$ es verdadera.

(II) $\mathbf{P}(k)$ implica $\mathbf{P}(k + 1)$

Suponga que $\mathbf{P}(k)$ es verdadera, en otras palabras, $x^k \geq 1$ es verdadera. Multipliquemos la desigualdad $x^k \geq 1$ por el número positivo x . Entonces

$$x^k x \geq 1 \cdot x$$

la desigualdad no se invierte pues x es positivo

$$x^{k+1} \geq x$$

Las expresiones $x^{k+1} \geq x$ y $x \geq 1$, conducen a $x^{k+1} \geq 1$, que no es otra cosa que $\mathbf{P}(k + 1)$

Ejemplo 6.1.2. Pruebe que $2^n > n$, donde $n \in \mathbb{N}$.

Sin duda $\mathbf{P}(n) : 2^n > n$.

(I) $\mathbf{P}(1)$ es verdadera

Tenemos que $\mathbf{P}(1) : 2^1 > 1$. Es obvia la veracidad de $2^1 > 1$.

(II) $\mathbf{P}(k)$ implica $\mathbf{P}(k + 1)$

$2^k > k$ nos debe conducir a $2^{k+1} > k + 1$.

$$2^k > k$$

$$2^k \cdot 2 > 2 \cdot k$$

$$2^{k+1} > 2 \cdot k$$

Además, en virtud de que k es natural, $k \geq 1$, por tanto $k + k \geq 1 + k$, o sea $2k \geq k + 1$. En conclusión,

$$2^{k+1} > 2k \geq k + 1,$$

a partir de lo cual $2^{k+1} > k + 1$

Ejemplo 6.1.3 (Desigualdad de Bernoulli). Suponga ahora que $x > -1$. Muestra por inducción matemática

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

(I) $\mathbf{P}(1)$ es verdadera

Resulta que $\mathbf{P}(1) : (1+x)^1 \geq 1+1 \cdot x$. En razón de $(1+x)^1 = 1+x$ y $1+1 \cdot x = 1+x$, entonces $(1+x)^1 \geq 1+1 \cdot x$.

(II) $(1+x)^k \geq 1+kx \implies (1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

Multipliquemos la hipótesis de inducción por $1+x$.

$$(1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)(1+x)$$

la desigualdad no se invierte pues $x > -1$, o sea $x+1 > 0$

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx+kx^2$$

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+kx^2+(k+1)x$$

Hagamos una pausa. El número $kx^2 > 0$, pues es multiplicación de positivos; con mayor razón, $1+kx^2 > 0$. Si a la desigualdad precedente le sumamos $(k+1)x$, entonces

$$1+kx^2+(k+1)x > (k+1)x.$$

Conjugando las desigualdades obtenidas

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+kx^2+(k+1)x \geq (k+1)x,$$

Finalmente, por transitividad $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$.

Ejemplo 6.1.4. Muestra por inducción matemática que¹

$$1+2+3+4 \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

De manera que $\mathbf{P}(n) : 1+2+3+4 \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(I) $\mathbf{P}(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ es verdadera

Es obvio a partir de que el cociente $\frac{1(1+1)}{2}$ es igual a 1.

¹En la próxima sección la expresión siguiente se escribirá como $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

(II) $\mathbf{P}(k)$ implica $\mathbf{P}(k+1)$, donde

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k) : 1 + 2 + 3 + 4 \cdots + (k-1) + k &= \frac{k(k+1)}{2} \\ \mathbf{P}(k+1) : 1 + 2 + 3 + 4 \cdots + (k-1) + k + (k+1) &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

Sumemos $k+1$ en ambos lados de $\mathbf{P}(k)$

$$\begin{aligned}1 + 2 + 3 + 4 \cdots + (k-1) + k + k + 1 &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

A partir de $\mathbf{P}(k)$ se ha obtenido $\mathbf{P}(k+1)$.

Ejemplo 6.1.5. Muestra que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{4^n - 1}{3} \in \mathbb{Z}$$

Sin lugar a dudas

$$\mathbf{P}(n) : \frac{4^n - 1}{3} \in \mathbb{Z}$$

(I) $\mathbf{P}(1)$ es verdadera, pues $\frac{4^1 - 1}{3} = 1$ que es entero.

(II) $\frac{4^k - 1}{3} \in \mathbb{Z}$ implica $\frac{4^{k+1} - 1}{3} \in \mathbb{Z}$.

La hipótesis de inducción $\frac{4^{k+1} - 1}{3}$ es un entero, si la multiplicamos

por el entero 4, se obtendrá otro entero. Entonces

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{4^k - 1}{3} &\in \mathbb{Z} \\ \frac{4(4^k) - 4}{3} &\in \mathbb{Z} \\ \frac{4^{k+1} - 4}{3} &\in \mathbb{Z} \\ \frac{4^{k+1} - 1 - 3}{3} &\in \mathbb{Z} \\ \frac{4^{k+1} - 1}{3} - 1 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

La última expresión es un entero, si le sumamos el entero uno, se obtiene otro entero. En consecuencia $\frac{4^{k+1} - 1}{3} \in \mathbb{Z}$.

6.2. Símbolo sumatorio y sus propiedades

Al igual que la necesidad de una definición formal de número natural, es necesaria la definición formal de una suma del tipo

$$a_1 + a_2 + a_3 \cdots + a_{n-1} + a_n$$

La suma de números reales es una operación binaria, es decir, se encuentra definida para cada par de valores reales. El símbolo sumatorio² es una forma compacta de escribir la suma de más de dos números. Su definición es recursiva e incluye la letra griega sigma \sum . Indica el proceso a través del cual se realiza efectivamente la suma de más de dos números.

Definición 6.2.1 (Sumatorio). Sean k, n números naturales o cero.

$$(a) \sum_{i=k}^k a_i = a_k$$

²También se usa frecuentemente la palabra *sumatoria*. Sin embargo, dicha palabra todavía no se encuentra aceptada por la Real Academia Española (RAE). *Sumatoria* es una palabra mucho más cómoda y fácil de usar que el término sumatorio. En el ejercicio del habla, resulta sencillo combinarla con la palabra suma, ya que comparten el género. Además, es una palabra mucho más amistosa que sumatorio. Estamos seguros que la RAE reconocerá próximamente la palabra *sumatoria* como equivalente a sumatorio.

(b) Si $n \geq k$, entonces

$$\sum_{i=k}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=k}^n a_i \right) + a_{n+1}$$

La definición a primera vista es extraña. No parece corresponder a

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Ejemplo 6.2.1. Desarrolle $\sum_{i=1}^3 a_i$ utilizando la definición.

Se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 a_i &= \sum_{i=1}^{2+1} a_i = \left(\sum_{i=1}^2 a_i \right) + a_3 && \text{(parte (b) de la def.)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{1+1} a_i \right) + a_3 = \left(\sum_{i=1}^1 a_i \right) + a_2 + a_3 && \text{(parte (b) de la def.)} \end{aligned}$$

Según la parte (a): $\sum_{i=1}^1 a_i = a_1$, entonces

$$= a_1 + a_2 + a_3.$$

Sin lugar a dudas, corresponde a lo ya sabíamos.

Ejemplo 6.2.2. Desarrolle $\sum_{i=0}^1 x^{1-i}y^i$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^1 x^{1-i}y^i &= \sum_{i=0}^{0+1} x^{1-i}y^i \\ &= \sum_{i=0}^0 x^{1-i}y^i + x^{1-1}y^1 && \text{(parte (b) def.)} \\ &= x^{1-0}y^0 + x^0y && \text{(parte (a) def.)} \\ &= x + y \end{aligned}$$

Es evidente la dificultad que trae consigo utilizar la definición en cada paso. En un momento dado, al igual que con los axiomas, podremos olvidarla para desarrollar sumatorias de un modo más rápido, aunque menos formal.

El símbolo sumatorio, ayuda a escribir en forma compacta ciertas expresiones. El caso del ejemplo 6.1.4, es posible escribirlo ahora como

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Hay cuatro propiedades de la suma que son imprescindibles. Las demostraremos por inducción matemática.

Teorema 6.2.1. (a) $\sum_{i=1}^n c = cn$

(b) $\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$

(c) $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$. Además, $\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$.

(d) $\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$

Demostración. (a).

Como se hará uso de inducción matemática, es necesario identificar una proposición dependiente de los naturales. Claro que

$$P(n) : \sum_{i=1}^n c = cn$$

Sigue mostrar que $P(1)$ es verdadera, donde $P(1) : \sum_{i=1}^1 c = c \cdot 1$. De acuerdo

a la definición de sumatorio, $\sum_{i=1}^1 c = c$, que obviamente es igual a $c \cdot 1$. Así que $P(1)$ es verdadera. Ahora toca probar que

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

donde $P(k) : \sum_{i=1}^k c = ck$ y $P(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1} c = c(k+1)$. Consideremos como verdadera $P(k)$. Según la segunda parte de la definición de sumatorio:

$$\sum_{i=1}^{k+1} c = \left(\sum_{i=1}^k c \right) + c \quad (6.1)$$

$$= (ck) + c \quad (P(k) \text{ es verdadera})$$

$$= c(k+1). \quad (6.2)$$

(b). Es claro que $\mathbf{P}(n) : \sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$

(I) Veamos que $\mathbf{P}(1) : \sum_{i=1}^1 ca_i = c \sum_{i=1}^1 a_i$ es verdadera.

Resulta fácil aplicando la primera parte de la definición de sumatoria:

$$\sum_{i=1}^1 ca_i = ca_1 \text{ y } c \sum_{i=1}^1 a_i = ca_1. \text{ Así, } \sum_{i=1}^1 ca_i = c \sum_{i=1}^1 a_i.$$

(II) Se debe mostrar la siguiente implicación:

$$\sum_{i=1}^k ca_i = c \sum_{i=1}^k a_i \text{ entonces } \sum_{i=1}^{k+1} ca_i = c \sum_{i=1}^{k+1} a_i$$

Recuerde que el antecedente es llamado hipótesis de inducción. Aplicando la segunda parte de la definición de sumatoria

$$\sum_{i=1}^{k+1} ca_i = \left(\sum_{i=1}^k ca_i \right) + ca_{k+1}$$

Es el momento de la hipótesis de inducción:

$$= c \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) + ca_{k+1}$$

factorizando c

$$\begin{aligned} &= c \left(\left(\sum_{i=1}^k a_i \right) + a_{k+1} \right) \\ &= c \sum_{i=1}^{k+1} a_i \end{aligned}$$

(c). Ejercicio.

(d): Esta propiedad es llamada propiedad telescópica del símbolo sumatorio.

Es evidente que

$$\mathbf{P}(n) : \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$$

(I) $\mathbf{P}(1) : \sum_{i=1}^1 (a_i - a_{i-1}) = a_1 - a_0$ es verdadera.

Debido a la primera parte de la definición de sumatoria

$$\sum_{i=1}^1 (a_i - a_{i-1}) = a_1 - a_{1-1} = a_1 - a_0$$

.

(II) $\sum_{i=1}^k (a_i - a_{i-1}) = a_k - a_0$ implica $\sum_{i=1}^{k+1} (a_i - a_{i-1}) = a_{k+1} - a_0$

Para esto note que por definición de sumatoria

$$\sum_{i=1}^{k+1} (a_i - a_{i-1}) = \left(\sum_{i=1}^k (a_i - a_{i-1}) \right) + a_{k+1} - a_k$$

por la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} &= a_k - a_0 + a_{k+1} - a_k \\ &= a_{k+1} - a_0 \end{aligned}$$

Ejemplo 6.2.3. Calcula $\sum_{i=1}^{40} (2i - 3)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{40} (2i - 3) &= \sum_{i=1}^{40} 2i - \sum_{i=1}^{40} 3 \\ &= 2 \sum_{i=1}^{40} i - 3(40) \end{aligned}$$

en virtud de la fórmula del ejemplo 6.1.4

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \frac{40(40 + 1)}{2} - 3(40) \\ &= 40(41) - 3(40) \\ &= 1520 \end{aligned}$$

Ejemplo 6.2.4. Vamos a utilizar la propiedad telescópica de la sumatoria para mostrar que

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Se usará la fórmula $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$. Sea $a_i = i^3$, no existe dificultad en hacer notar que $a_{i-1} = (i-1)^3 = i^3 - 3i^2 + 3i - 1$. Ahora, hagamos un poco de

cuentas

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) &= a_n - a_0 \\ \sum_{i=1}^n (i^3 - (i^3 - 3i^2 + 3i - 1)) &= n^3 - 0^3 \\ \sum_{i=1}^n (3i^2 - 3i + 1) &= n^3 \\ \sum_{i=1}^n 3i^2 - \sum_{i=1}^n 3i + \sum_{i=1}^n 1 &= n^3 \\ 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \sum_{i=1}^n i + n &= n^3 \\ 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \frac{n(n+1)}{2} + n &= n^3 \\ 3 \sum_{i=1}^n i^2 &= n^3 + 3 \frac{n(n+1)}{2} - n \\ 3 \sum_{i=1}^n i^2 &= n^3 + \frac{3n^2}{2} + \frac{3n}{2} - n \\ 3 \sum_{i=1}^n i^2 &= n^3 + \frac{3n^2}{2} + \frac{n}{2} \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \end{aligned}$$

6.3. Teorema del binomio

Este apartado requiere de los llamados coeficientes binomiales, cuya definición, depende a su vez, del factorial.

Si $n \in \mathbb{N}$, el símbolo $n!$ representa la multiplicación desde 1 hasta n . Esto es

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n.$$

Se lee “el factorial de n ”. Es útil agregar la definición del factorial de cero, $0! = 1$.

Según lo mencionado, el factorial de 5 se calcula de la siguiente forma:

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Ahora bien, el coeficiente binomial denotado por $\binom{n}{k}$ ó ${}_nC_k$ tiene por definición

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

donde $k \leq n$.

Ejemplo 6.3.1. Calcula $\binom{11}{8}$.

$$\begin{aligned} \binom{11}{8} &= \frac{11!}{(11-8)!8!} = \frac{11!}{(3!)8!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2} \\ &= 11 \cdot 5 \cdot 3 \\ &= 165 \end{aligned}$$

Algunas veces, como es el caso del próximo teorema, se hace uso del siguiente hecho:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n = (n-1)!n$$

Teorema 6.3.1 (Triángulo de Pascal). Si $n, k \in \mathbb{N}$ y $k \leq n$ entonces

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!k}{(n-k+1)!(k-1)!k} + \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!k}{(n-k+1)!k!} + \frac{n!(n-k+1)}{(n-k)!(n-k+1)k!} \\
&= \frac{n!k}{(n-k+1)!k!} + \frac{n!(n-k+1)}{(n-k+1)!k!} \\
&= \frac{n!k + n!(n-k+1)}{(n-k+1)!k!} = \frac{n!(n+1)}{(n+1-k)!k!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

Llega el momento de presentar el teorema del binomio. Para su demostración haremos uso de la inducción matemática.

Teorema 6.3.2 (Teorema del binomio).

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

Demostración. Considere a

$$\mathbf{P}(n) : (x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

$$(I) \mathbf{P}(1) : (x+y)^1 = \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} x^{1-i} y^i$$

La demostración de la veracidad de ésta proposición se encuentra, en parte, tratada en el ejemplo 6.2.2. Sólo agregue al ejemplo el coeficiente binomial. En el desarrollo utilizará que $\binom{1}{0} = 1$ y $\binom{1}{1} = 1$.

(II) Se tiene que mostrar la siguiente implicación

$$(x+y)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{k-i} y^i \implies (x+y)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^{k+1-i} y^i$$

$$\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= \\
&= (x+y)(x+y)^k \\
&= (x+y) \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{k-i} y^i = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{k-i} y^i (x+y) \\
&= \sum_{i=0}^k \left[\binom{k}{i} x^{k+1-i} y^i + \binom{k}{i} x^{k-i} y^{i+1} \right] \\
&= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{k+1-i} y^i + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{k-i} y^{i+1}
\end{aligned}$$

Ahora, desarrolle por separado $\sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} x^{k+1-i} y^i$ y $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{k-i} y^{i+1}$ y verifique que son exactamente lo mismo

$$= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{k+1-i} y^i + \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} x^{k+1-i} y^i$$

note que $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{k+1-i} y^i = \binom{k}{0} x^{k+1-0} y^0 + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^{k+1-i} y^i$, por lo tanto

$$= x^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^{k+1-i} y^i + \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} x^{k+1-i} y^i$$

también $\sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} x^{k+1-i} y^i = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i-1} x^{k+1-i} y^i + \binom{k}{k+1-1} x^{k+1-(k+1)} y^{k+1}$

$$\begin{aligned}
&= x^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^{k+1-i} y^i + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i-1} x^{k+1-i} y^i + \binom{k}{k} y^{k+1} \\
&= x^{k+1} + \sum_{i=1}^k \left[\binom{k}{i} x^{k+1-i} y^i + \binom{k}{i-1} x^{k+1-i} y^i \right] + y^{k+1} \\
&= x^{k+1} + \sum_{i=1}^k \left[\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} \right] x^{k+1-i} y^i + y^{k+1}
\end{aligned}$$

Recuerde que $\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \binom{k+1}{i}$

$$= x^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} x^{k+1-i} y^i + y^{k+1}$$

Se sabe que $\binom{k+1}{0} = 1$ y $\binom{k+1}{k+1} = 1$

$$\begin{aligned} &= \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} x^{k+1-i} y^i + \binom{k+1}{k+1} y^{k+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^{k+1-i} y^i \end{aligned}$$

□

Ejemplo 6.3.2. Calcula el término que contiene $\frac{x^3}{y}$ en el desarrollo binomial de $(xy - \frac{1}{\sqrt{y}})^{11}$.

Escribamos la potencia del binomio apoyados en el teorema 6.3.2

$$\left(xy - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{11} = \sum_{i=0}^{11} \binom{11}{i} (xy)^{11-i} \left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^i$$

En realidad se busca el valor de i tal que

$$\begin{aligned} (xy)^{11-i} \left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^i &= \frac{x^3}{y} \\ (xy)^{11-i} (-y^{-\frac{1}{2}})^i &= x^3 y^{-1} \\ (xy)^{11-i} (-1)^i (y^{-\frac{1}{2}})^i &= x^3 y^{-1} \\ x^{11-i} y^{11-i-\frac{1}{2}i} (-1)^i &= x^3 y^{-1} \end{aligned}$$

Se obtiene $11 - i - \frac{1}{2}i = -1$ y $11 - i = 3$. Despejando i en cualquiera de las dos ecuaciones, resulta $i = 8$. En otro sentido, el coeficiente binomial que corresponde a $i = 8$, es

$$\binom{11}{8} = \frac{11!}{(11-8)!8!} = 165$$

El término pedido es $\frac{165x^3}{y}$.

Ejercicios 9. 1. Muestra que

$$\sum_{i=1}^n (a_i b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i$$

es una propiedad falsa.

2. Muestra por inducción matemática la expresión

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

3. Ya se estableció la igualdad

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

utilizando la propiedad telescópica de la sumatoria. Ahora, demuéstrala por inducción matemática.

4. Con la propiedad telescópica de la sumatoria, muestra que

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

5. La igualdad

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

donde $r \neq 1$ y $n \in \mathbb{N}$, es ocupada para definir la serie geométrica. Se establece de varias maneras, aquí tienes que mostrarla por inducción matemática.

6. Usa la inducción para demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{5^n - 1}{4} \in \mathbb{Z}$$

7. Con apoyo de la inducción, demuestra que para cada $n \geq 4$, $2^n < n!$
Sugerencia: La inducción no empieza desde 1, sino desde 4. Además, en alguna parte tendrás que usar la desigualdad $2 \leq k + 1$.

8. Demuestra por inducción matemática que para cada $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 2n$ es divisible por 3
9. Demuestra por inducción matemática que

$$\sum_{i=1}^n 3^{i-1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

Sugerencia: escribe la expresión $\sum_{i=1}^{k+1} 3^{i-1}$ de manera que puedas usar la hipótesis de inducción.

10. Con el teorema del binomio halle el término independiente en el desarrollo de

$$\left(\frac{1}{x} - x^4\right)^{30}$$

Capítulo 7

Soluciones

Sol. ejercicios 1.

Sol. ejercicios 2.

Sol. ejercicios 3.

Sol. ejercicios 4. 1. Suponga que existen dos números reales u y u' , tales que

$$a) \forall x \in \mathbb{R} : xu = x$$

$$b) \forall x \in \mathbb{R} : xu' = x$$

Si sustituye u' y u , en (a) y (b) respectivamente, obtiene: $u'u = u'$ y $uu' = u$. Considerando que la multiplicación es conmutativa, entonces

$$u = uu' = u'u = u',$$

de donde $u = u'$.

2. Como $t \neq 0$, según el axioma 8, existe t' tal que $tt' = 1$.

$$\begin{aligned} xt &= yt \\ (xt)t' &= (yt)t' && \text{(asociatividad)} \\ x(tt') &= y(tt') && \text{(recíproco)} \\ x \cdot 1 &= y \cdot 1 \\ x &= y. \end{aligned}$$

3. Suponga que x no es cero y que existen y e y' tales que

$$xy = 1 \quad \wedge \quad xy' = 1.$$

En realidad se tiene $xy = xy'$. Por la ley de cancelación del producto, del ejercicio anterior, es posible cancelar x , por ende $y = y'$.

4. Es falso que para cada par de reales $a - b = b - a$. Considere los números 2 y 5. Calculando las sumas $5 - 2 = 3$ y $2 - 5 = -3$, es obvio que $5 - 2 \neq 2 - 5$.
5. Si $a \neq 0$, entonces existe a^{-1} tal que $aa^{-1} = 1$. Si $a^{-1} = 0$, entonces $aa^{-1} = 0$, de donde $1 = 0$, lo cuál es absurdo. Por lo tanto $a^{-1} \neq 0$.
6. Es importante recordar que si se tiene $xy = 1$, entonces la unicidad del recíproco, nos permite deducir que $y = x^{-1}$. En nuestro caso, sabemos que $aa^{-1} = 1$, equivalentemente, $a^{-1}a = 1$, de modo que $a = (a^{-1})^{-1}$.
7. Recuerde que si tiene $x + y = 0$, la unicidad del inverso aditivo, conduce a concluir que $y = -x$. En este caso, observe lo siguiente

$$\begin{aligned} ab + a(-b) &= a(b + (-b)) && \text{(distributividad)} \\ &= a0 && \text{(inverso aditivo)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

esto es, $ab + a(-b) = 0$, por lo tanto, $a(-b) = -ab$.
Por otro lado, un corolario inmediato de lo anterior

$$(-1)a = -1a = -a$$

8. Note que se esta pidiendo se muestre que el inverso aditivo de $(a - b)$, es $b - a$, para ello basta realizar la suma $(a - b) + (b - a)$ y mostrar que vale cero.

$$\begin{aligned} (a - b) + (b - a) &= [a + (-b)] + [b + (-a)] && \text{(def. de resta)} \\ &= [a + ((-b) + b)] + (-a) && \text{(asociatividad)} \\ &= (a + 0) + (-a) && \text{(inverso aditivo)} \\ &= a + (-a) && \text{(neutro aditivo)} \\ &= 0 && \text{(inverso aditivo)} \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
a(b - c) &= a(b + (-c)) && \text{(def. de resta)} \\
&= ab + a(-c) && \text{(distributividad)} \\
&= ab + (-ac) && \text{(ley de los signos)} \\
&= ab - ac && \text{(def. de resta)}
\end{aligned}$$

10. Es necesario definir $2 = 1 + 1$.

$$\begin{aligned}
(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\
&= (a + b)a + (a + b)b && \text{(distributividad)} \\
&= a^2 + ba + ab + b^2 \\
&= a^2 + ab + ab + b^2 && \text{(conmutatividad)} \\
&= a^2 + 1 \cdot (ab) + 1 \cdot (ab) + b^2 \\
&= a^2 + (1 + 1)(ab) + b^2 && \text{(distributividad)} \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}$$

11. Según los datos $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Por el ejercicio anterior se sabe que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, entonces

$$\begin{aligned}
a^2 + 2ab + b^2 &= a^2 + b^2 \\
2ab + b^2 &= b^2 && (a^2 \text{ cancelado}) \\
2ab + b^2 &= 0 + b^2 \\
2ab &= 0 && (b^2 \text{ cancelado}) \\
\frac{1}{2}(2ab) &= \frac{1}{2}(0) \\
ab &= 0
\end{aligned}$$

es claro que $a = 0 \vee b = 0$.12. Como $a \neq 0$, puedo multiplicar la igualdad $a^3 = a$ por el recíproco de a

$$\begin{aligned}
a^3 &= a \\
a^3 a^{-1} &= a a^{-1} \\
(a^2 a) a^{-1} &= 1 \\
a^2 (a a^{-1}) &= 1 \\
a^2 &= 1
\end{aligned}$$

La última igualdad, es equivalente a $a^2 - 1 = 0$, que se puede escribir como $a^2 - 1^2 = 0$. Ya sabemos que $a^2 - 1^2 = (a - 1)(a + 1)$. Por lo tanto $a = 1 \vee a = -1$.

13. Obtener las igualdades de este problema es sencillo, sólo hace falta, tener muy claro que por la unicidad del recíproco, si se tiene $xy = 1$, entonces $y = x^{-1}$ (¡no es despeje!).

Como $1 \cdot 1 = 1$, se debe concluir que $1 = 1^{-1}$.

Por otro lado, por las leyes de los signos $(-1)(-1) = 1$, en consecuencia $-1 = (-1)^{-1}$.

Finalmente, la expresión $(-a)^{-1} = -a^{-1}$, dice que el recíproco de $-a$ es $-a^{-1}$, así que sólo basta mostrar que $(-a)(-a^{-1}) = 1$:

$$(-a)(-a^{-1}) = aa^{-1} = 1.$$

- 14.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= (ab^{-1})(cd^{-1}) = [(ab^{-1})c]d^{-1} = [c(ab^{-1})]d^{-1} \\ &= [(ca)b^{-1}]d^{-1} = (ca)(b^{-1}d^{-1}) = (ac)(bd)^{-1} \\ &= \frac{ac}{bd}. \end{aligned}$$

Aquí la otra igualdad pedida

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{ac}{bc}.$$

15. Note que si multiplicamos dos irracionales $\sqrt{2}\sqrt{2} = \sqrt{2^2} = 2$, pero 2 racional, por lo tanto los irracionales no son cerrados con el producto. Además, si sumamos $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$, cuyo resultado es racional: tampoco es cerrado con la suma.

Hagamos ver que la suma de un racional y un irracional es irracional. Sea $q \in \mathbb{Q}$ y $r \in \mathbb{I}$. Supóngase por el contrario que $q + r$ es racional, sea $q_1 = q + r$. Note que $r = q_1 - q$, sin embargo, $r = q_1 - q$ es racional por ser la diferencia de racionales y r es irracional, lo cual es absurdo.

16. Primero se pide mostrar que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$, esto es, que el inverso mul-

tiplicativo de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$. Veamos

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = 1.$$

Ahora probemos la regla de división de fracciones (extremos por extremos, medios por medios).

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} \right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

17. Este es obvio. Si $a = 0 \vee b = 0$, entonces una de las proposiciones es verdadera, es decir, uno de ellos es cero, entonces el producto es cero.
18. Recuerde que $-b^{-1} = (-b)^{-1}$

$$\frac{-a}{b} = (-a)b^{-1} = a(-b^{-1}) = a(-b)^{-1} = \frac{a}{-b}$$

y

$$\frac{a}{-b} = a(-b)^{-1} = a(-b^{-1}) = -ab^{-1} = -\frac{a}{b}$$

- 19.

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{c} &= (a+b)c^{-1} && \text{(def. de división)} \\ &= ac^{-1} + bc^{-1} && \text{(distributividad)} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{b}{c}. \end{aligned}$$

20. Se tiene que $a^2 - b^2 = 0$ y por otro lado se sabe que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, entonces $(a+b)(a-b) = 0$. Así, $a+b = 0 \vee a-b = 0$, en otras palabras, $a = -b \vee a = b$.

Ahora encontremos todos los reales tales que $a^{-1} = a$. Es posible multiplicar, la última igualdad por el elemento a :

$$a(a^{-1}) = a \cdot a.$$

de donde $1 = a^2$. De esta manera, $a^2 - 1 = 0$. Es bien sabido que $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$, de lo cual $a = -1 \vee a = 1$.

21. ¿Cuánto es $20 \div 5 + 5$? Si su respuesta fue 9 ó 2, pues está equivocado. Peor aún, si su argumentación giró en torno a la "jerarquía de operaciones". En tal caso, está en la obligación de leer otra vez desde el principio. Siempre que se explican cuestiones matemáticas, es necesario apoyarse en teoremas, definiciones, etc., ya demostrados. En todo

este libro nunca se habla, no es necesario, de tal jerarquía. Tal vez no lo ha notado, pero en matemáticas no hace falta un concepto de ese corte. La forma de indicar la operación a realizar es través del uso de paréntesis, corchetes o llaves. En la expresión $20 \div 5 + 5$ no es clara la forma de realizar las operaciones, por lo tanto, no hay respuesta. No debe confundir esto, con la jerarquía de operaciones tan **necesaria** en programación.

Sol. ejercicios 5. 1. Hay muchos pares diferentes de números que satisfacen dicha igualdad, considera por ejemplo $a = 1$ y $b = -1$.

2.

$$\begin{array}{ll}
 3x - 1 = 0 & \\
 3x - 1 + 1 = 0 + 1 & \text{(inverso aditivo de 1)} \\
 3x + 0 = 1 & \text{(neutro aditivo)} \\
 3x = 1 & \\
 \frac{1}{3} \cdot (3x) = \frac{1}{3} \cdot (1) & \text{(recíproco de 3)} \\
 \left(\frac{1}{3} \cdot 3\right)x = \frac{1}{3} & \text{(asociatividad)} \\
 1 \cdot x = \frac{1}{3} & \text{(neutro mult.)} \\
 x = \frac{1}{3} &
 \end{array}$$

3. Restricciones: $b \neq 0, x \neq d, 1 - fb \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x-a}{b} - fd}{x-d} &= f \\ \left[\frac{\frac{x-a}{b} - fd}{x-d} \right] (x-d) &= f(x-d) && \text{(mult. recíproco de } x-d) \\ \frac{x-a}{b} - fd &= f(x-d) \\ \frac{x-a}{b} - fd &= fx - fd && \text{(distributividad)} \\ \frac{x-a}{b} &= fx && \text{(} -fd \text{ cancelado)} \\ \frac{x-a}{b} \cdot b &= fx \cdot b && \text{(mult. por } b) \\ x-a &= fbx \\ x-a+a &= a+fbx && \text{(inv. adit. de } a) \\ x &= a+fbx \\ x-fbx &= a+fbx-fbx && \text{(inv. adit. de } fbx) \\ x-fbx &= a \\ x(1-fb) &= a && \text{(distributividad)} \\ x(1-fb) \cdot \frac{1}{1-fb} &= a \cdot \frac{1}{1-fb} && \text{(mult. recíproco de } 1-fb) \\ x &= \frac{a}{1-fb} \end{aligned}$$

4. En primer lugar, según la expresión aparece el recíproco de x , de manera que $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{x+12}{3x^{-1}} &= -5x^3 + 4x \\ \frac{x+12}{3x^{-1}} \cdot (3x^{-1}) &= (3x^{-1})(-5x^3 + 4x) && \text{(mult. por } 3x^{-1}) \\ x+12 &= (3x^{-1})(-5x^3 + 4x) \\ x+12 &= (3x^{-1})(-5x^3) + (3x^{-1})(4x) && \text{(distributividad)} \\ x+12 &= -15x^2 + 12 && \text{(12 cancelado)} \\ x &= -15x^2 \\ x+15x^2 &= -15x^2 + 15x^2 && \text{(suma de } 15x^2) \\ x+15x^2 &= 0 \\ x(1+15x) &= 0 && \text{(distributividad)} \end{aligned}$$

Como $x \neq 0$, entonces $1+15x = 0$. Existe un sólo número que satisface dicha ecuación: $x = \frac{-1}{15}$.

5.

$$\begin{aligned} \frac{(x^{-1} + 1)^{-1}}{1 + \frac{x^{-1}-1}{x^{-1}+1}} &= x^2 \\ \frac{(x^{-1} + 1)^{-1}}{\frac{x^{-1}+1}{x^{-1}+1} + \frac{x^{-1}-1}{x^{-1}+1}} &= x^2 && \text{(note que } \frac{x^{-1}+1}{x^{-1}+1} = 1) \\ \frac{(x^{-1} + 1)^{-1}}{\frac{x^{-1}+1+x^{-1}-1}{x^{-1}+1}} &= x^2 && \text{(recuerde que } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}) \\ \frac{(x^{-1} + 1)^{-1}}{\frac{2x^{-1}}{x^{-1}+1}} &= x^2 \\ \frac{1}{\frac{2x^{-1}}{x^{-1}+1}} &= x^2 && ((x^{-1} + 1)^{-1} = \frac{1}{x^{-1}+1}) \\ \frac{x^{-1} + 1}{(x^{-1} + 1)(2x^{-1})} &= x^2 && \text{(división de fracciones)} \\ \frac{1}{2x^{-1}} &= x^2 && \text{(cancela } x^{-1} + 1 \text{ (} \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \text{))} \\ 1 &= 2x^{-1}x^2 \\ 1 &= 2x \end{aligned}$$

finalmente, $x = \frac{1}{2}$.

Sol. ejercicios 6. 1.

2. $a \leq x \leq a$ es una forma compacta de escribir $a \leq x \wedge x \leq a$. Recuerde que el símbolo \leq es posible usarlo cuando se cumple el “<” ó el “=”. Si supone que $x \neq a$ entonces forzosamente se tiene que $a < x \wedge x < a$, lo cual es contradictorio con la ley de tricotomía.

3. (a) Las hipótesis $a < b$ y $c > 0$, llevan a que $b - a \in \mathbf{P}$ y $c - 0 \in \mathbf{P}$, de manera que $c \in \mathbf{P}$. Debido a que el conjunto \mathbf{P} es cerrado bajo el producto, entonces $c(b - a) \in \mathbf{P}$, esto es, $cb - ca \in \mathbf{P}$. En forma equivalente $ac < cb$.

(b) Tome la desigualdad $x < y$ y multiplíquela por r , que según las hipótesis es positivo:

$$xr < yr.$$

De la misma forma, la desigualdad $r < t$ multiplíquela por el número positivo y :

$$yr < yt.$$

De las dos desigualdades obtenidas:

$$xr < yr < yt.$$

Por transitividad, $xr < yt$.

4. No olvides que $a < \frac{a+b}{2} < b$, significa $a < \frac{a+b}{2} \wedge \frac{a+b}{2} < b$. El resultado se mostrará en dos partes. Primero

$$\begin{aligned} a &< b \\ a + a &< a + b && \text{(suma } a) \\ 2a &< a + b \\ \frac{1}{2} \cdot (2a) &< \frac{1}{2} \cdot (a + b) \\ a &< \frac{a + b}{2} \end{aligned}$$

La otra parte, $\frac{a+b}{2} < b$, se realiza en forma muy semejante sumando b en ambos lados de $a < b$.

5. Supóngase que $a < 0$, pero $a^{-1} > 0$. Resulta que

$$\begin{aligned} a^{-1} &> 0 \\ aa^{-1} &< a \cdot 0 \end{aligned}$$

la desigualdad se invirtió, dado que $a < 0$. Continuando,

$$1 < 0.$$

Lo cual es absurdo. En consecuencia, si $a < 0$ entonces $a^{-1} < 0$.

6. En razón que a y b , son positivos, entonces a^{-1} y b^{-1} los son también.

$$\begin{aligned} a &\leq b \\ aa^{-1} &\leq a^{-1}b \\ 1 &\leq a^{-1}b \\ 1 \cdot b^{-1} &\leq (a^{-1}b)b^{-1} \\ b^{-1} &\leq a^{-1}(bb^{-1}) \\ b^{-1} &\leq a^{-1}. \end{aligned}$$

7. Suponga que $(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$. La idea es mostrar que $ab > 0$, es decir, $ab \in \mathbf{P}$.

Si $a > 0 \wedge b > 0$, entonces $a, b \in \mathbf{P}$, por lo tanto $ab \in \mathbf{P}$, pues \mathbf{P} es cerrado bajo la multiplicación.

Si $a < 0 \wedge b < 0$, entonces $-a, -b \in \mathbf{P}$, entonces $(-a)(-b) = ab \in \mathbf{P}$.

8.

9. Si $x \in (-1, 4)$ entonces $-1 < x < 4$.

$$\begin{aligned} -1 &< x < 4 \\ \frac{1}{3}(-1) &< \frac{1}{3}x < \frac{1}{3} \cdot 4 \\ -\frac{1}{3} &< \frac{x}{3} < \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} + 2 &< \frac{x}{3} + 2 < \frac{4}{3} + 2 \\ \frac{5}{3} &< \frac{x}{3} + 2 < \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

En otras palabras, $\frac{x}{3} + 2 \in \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$

10. Sea $x \in \mathbb{R}$. Se tienen tres posibles casos, excluyentes, por la tricotomía: $x = 0 \vee x < 0 \vee x > 0$.

Hay una forma directa de obtener $x^2 \geq 0$, considerando el ejercicio 7 de la lista de ejercicios 6. Aunque para practicar, es bueno hacerlo sin usarlo.

Si $x = 0$, entonces $x^2 = 0$, por lo tanto $x^2 \geq 0$.

Si $x > 0$, entonces $x^2 > 0$, pues el producto de positivos es positivo (cerradura de \mathbf{P}).

Si $x < 0$, entonces $-x > 0$, de modo que $(-x)(-x) \in \mathbf{P}$, pero $(-x)(-x) = x^2$, por lo tanto $x^2 \geq 0$.

11. g) Usemos el corolario 3.5.1. Se tienen dos casos:

$$\left[2x + 1 < 0 \wedge x - 4 > 0 \right] \vee \left[2x + 1 > 0 \wedge x - 4 < 0 \right]$$

El primer corchete trae como resultados $x < -\frac{1}{2} \wedge x > 4$. Es decir, $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cap (4, \infty) = \emptyset$. No hay soluciones posibles en este caso.

En el segundo corchete se obtiene $x > -\frac{1}{2} \wedge x < 4$. Entonces

$$\left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \cap (\infty, 4) = \left(-\frac{1}{2}, 4\right)$$

El conjunto solución: $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$.

Sol. ejercicios 7. 1. (a) Se pide probar que $x \leq |x|$. Consideremos primero el caso $x \geq 0$. Por definición $|x| = x$. Se sigue que $x \leq |x|$. Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$. La desigualdad $x < 0$, implica que $-x > 0$, por ende

$$x < 0 < -x = |x|,$$

por transitividad, $x < |x|$, de donde $x \leq |x|$.

(b) Puede aplicar $|xy| = |x||y|$. Observe:

$$|-x| = |(-1)(x)| = |-1||x| = |x|.$$

Sin embargo, también se puede demostrar el resultado con la pura definición.

Si $x \geq 0$, entonces $-x \leq 0$. Ahora, por definición de valor absoluto $|x| = x$ y $|-x| = -(-x) = x$, en consecuencia $|-x| = |x|$.

Si $x < 0$, entonces $-x > 0$. Análogo al caso anterior, $|x| = -x$ y $|-x| = -x$. Así, $|-x| = |x|$.

(c) Consecuencia del inciso anterior: $|x - y| = |-(y - x)| = |y - x|$.

(d)

$$\begin{aligned} |x - y| &= |x + (-y)| && \text{(def. de resta)} \\ &\leq |x| + |-y| && \text{(desigualdad triangular)} \\ &\leq |x| + |y|. \end{aligned}$$

Resulta que $|x - y| \leq |x| + |y|$.

(e) Por un lado $|x| = |x + 0| = |x + y - y|$. Usando la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} |x + y - y| &\leq |x + y| + |-y| \\ &\leq |x + y| + |y| \end{aligned}$$

Por transitividad, $|x| \leq |x + y| + |y|$. Así, $|x| - |y| \leq |x + y|$.

- (f) $|y| = |y + x - x| \leq |y + x| + |x|$. Por lo tanto $|y| - |x| \leq |x + y|$. En ésta última desigualdad podemos multiplicar por -1 ambos lados y entonces

$$-|x + y| \leq |x| - |y|.$$

En el inciso anterior se obtuvo $|x| - |y| \leq |x + y|$. Reuniendo lo que se ha logrado

$$-|x + y| \leq |x| - |y| \leq |x + y|,$$

de aquí que $||x| - |y|| \leq |x + y|$ (vea teorema 4.1.4).

2.

3. Sea x cualquier número. $|x^2| = |xx| = |x||x| = |x|^2$. Por otro lado, ya se probó que $x^2 \geq 0$, por lo tanto $|x^2| = x^2$. Así $x^2 = |x|^2$.

4. Para cualquier x se tiene que $x^2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} x^2 &\geq 0 \\ mx^2 &\geq 0 \\ mx^2 + b &\geq b \geq 0 \end{aligned}$$

Por transitividad, $mx^2 + b \geq 0$, por lo tanto $|mx^2 + b| = mx^2 + b$.

5.

6. La proposición falsa es (iii), pues $|-2a^2 - 1| = |-(2a^2 + 1)| = |2a^2 + 1|$. Además, $|2a^2 + 1| = 2a^2 + 1$, pues siempre ocurre que $2a^2 + 1 \geq 0$.

7.

$$\begin{aligned} |x - 3| &< 1 \\ -1 &< x - 3 < 1 \\ -1 + 6 &< x - 3 + 6 < 1 + 6 \\ 5 &< x + 3 < 7 \end{aligned}$$

Como $-7 < 5$, entonces $-7 < x + 3 < 7$, en otras palabras $|x + 3| < 7$.

8.

$$\begin{aligned}
 |x + y| &= |x| + |y| \\
 |x + y|^2 &= (|x| + |y|)^2 \\
 (x + y)^2 &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\
 (x + y)^2 &= x^2 + 2|x||y| + y^2 \\
 x^2 + 2xy + y^2 &= x^2 + 2|x||y| + y^2
 \end{aligned}$$

Cancelando se obtiene $xy = |xy|$. De acuerdo a la definición de valor absoluto $|xy| = xy$, si $xy \geq 0$, es decir, $(x \leq 0 \wedge y \leq 0) \vee (x \geq 0 \wedge x \geq 0)$ (vea teorema 3.5.4). Así pues, basta con que sean ambos positivos (o cero) o ambos negativos (o cero) para obtener la igualdad $|x + y| = |x| + |y|$. Veamos un ejemplo con -1 y -2 :

$$|x + y| = |-1 + (-2)| = |-3| = 3$$

por otro lado

$$|x| + |y| = |-1| + |-2| = 1 + 2 = 3$$

9. De $|2x + 3| < 0.1$

$$\begin{aligned}
 -0.1 &< 2x + 3 < 0.1 \\
 -3.1 &< 2x < -2.9
 \end{aligned}$$

de la misma forma obtenga $1.99 < y < 2.01$. Si multiplica por -1 obtendrá:

$$-1.99 > -y > -2.01,$$

esto es $-2.01 < -y < -1.99$.

$$\begin{aligned}
 -3.1 &< 2x < -2.9 \\
 -2.01 &< -y < -1.99 \\
 -3.1 - 2.01 &< 2x - y < -2.9 - 1.99 \\
 -5.11 &< 2x - y < -4.89
 \end{aligned}$$

Como $-5.11 < 2x - y$, entonces es falso que $2x - y < -6$.

10. (a) Siempre es cierto que $0 \leq y^2$. Sumando x^2 a ambos lados

$$x^2 \leq x^2 + y^2$$

- (b) Como todavía no se ha visto raíz cuadrada, empezaremos suponiendo que $|x| > 1$. Multipliquemos ambos lados por $|x|$, que según lo supuesto es positivo, entonces $|x||x| > |x|$, o sea $|x|^2 > |x|$. En realidad hemos obtenido $1 < x^2$. Ahora, usando el inciso anterior $1 < x^2 \leq x^2 + y^2$, es decir $1 < x^2 + y^2$, contrario a lo que se está suponiendo originalmente (vea el problema). Finalmente, $|x| \leq 1$.
- (c) Se tiene, según el trabajo anterior, $|x|, |y| \leq 1$. Sumando ambas, $|x| + |y| \leq 2$. ahora usando la desigualdad triangular

$$|x + y| \leq |x| + |y| \leq 2.$$

11.

12.

13. Se trata de resolver la desigualdad $|4x - 1| < |1 - x|$. Ya en la sugerencia se mencionó que, primero se aplica el teorema 4.1.4. Entonces

$$-|1 - x| < |4x - 1| < |1 - x|,$$

lo cual se traduce en resolver la conjunción

$$\left[-|1 - x| < 4x - 1 \right] \wedge \left[4x - 1 < |1 - x| \right].$$

Procedamos a resolver en dos partes:

- (a) $-|1 - x| < 4x - 1$

En forma equivalente, $|1 - x| > -4x + 1$. Si aplica el corolario 4.1.1, entonces

$$1 - x > -4x + 1 \quad \vee \quad -(1 - x) > -4x + 1$$

Las dos desigualdades resultantes son básicas. Si las simplifica obtendrá

$$x > 0 \quad \vee \quad x > \frac{2}{5}.$$

En términos de intervalos queda $(0, \infty) \cup (\frac{2}{5}, \infty) = (0, \infty)$.

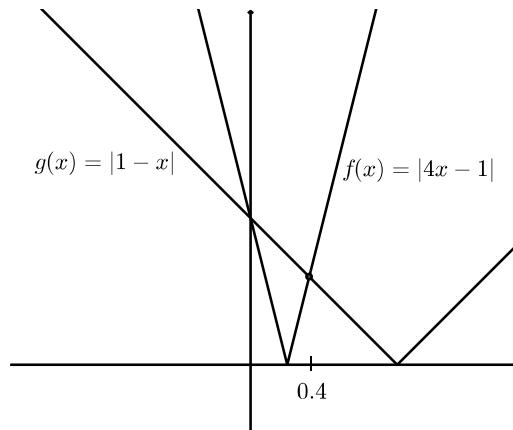


Figura 7.1

(b) $4x - 1 < |1 - x|$

Es claro que la desigualdad es la misma que $|1 - x| > 4x - 1$.
Usando también el corolario 4.1.1

$$1 - x > 4x - 1 \quad \vee \quad -(1 - x) > 4x - 1$$

Resolviendo

$$x < \frac{2}{5} \quad \vee \quad x < 0$$

En forma equivalente $(-\infty, \frac{2}{5}) \cup (-\infty, 0) = (-\infty, \frac{2}{5})$.

Para concluir, la solución total se encuentra cuando se intersectan las soluciones de la parte (a) y (b):

$$(0, \infty) \cap (-\infty, \frac{2}{5}) = (0, \frac{2}{5})$$

En forma opcional puede graficar las funciones $|4x - 1|$ y $|1 - x|$ (vea la figura 7.1). Es evidente que la función $|4x - 1|$ se encuentra por debajo de la función $|1 - x|$ exactamente en el intervalo $(0, 0.4)$, que coincide con la solución analítica.

14. $x \in [-1, 0] : f(x) \geq g(x)$. Además $x \in [0, 2] : f(x) \leq g(x)$.

Sol. ejercicios 8. 1.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right) = \frac{\sqrt{x}^2}{\sqrt{y}^2} \\ &= \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ es un número que elevado al cuadrado resulta $\frac{x}{y}$, por definición de raíz cuadrada $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

2. (a) Hay muchos ejemplos, un clásico $x = 9$ y $y = 4$. $\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Por otro lado, $\sqrt{9} = 3$ y $\sqrt{4} = 2$. Es claro que $\sqrt{9+4} \neq \sqrt{9} + \sqrt{4}$.
- (b)

$$\begin{aligned} \sqrt{x+y} &= \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ \sqrt{x+y}^2 &= (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \\ x+y &= \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}^2 \\ x+y &= x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \\ 0 &= 2\sqrt{xy} \\ 0 &= 4xy \end{aligned}$$

En resumen, la igualdad $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, se da cuando $xy = 0$, o sea $x = 0 \vee y = 0$.

3.

4. (a) $a < b$ implica que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Entonces $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$.

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 &> 0 \\ \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 &> 0 \\ a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b &> 0 \\ a + b &> 2\sqrt{a}\sqrt{b} \\ \frac{a+b}{2} &> \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} a &< b \\ ab &< b^2 \\ \sqrt{ab} &< \sqrt{b^2} \end{aligned}$$

de donde $\sqrt{ab} < b$. La otra parte $a < \sqrt{ab}$, sale análogamente.

5. Sólo saca raíz cuadrada a la desigualdad $x^2 \leq x^2 + y^2$.

6. (a)

(b) Se aplica el teorema 4.1.4 y el corolario 4.1.1. La desigualdad

$$|x^2 - 4x - 8| < x + 6,$$

es equivalente a la conjunción

$$\left[-(x + 6) < x^2 - 4x - 8 \right] \wedge \left[x^2 - 4x - 8 < x + 6 \right]$$

Se resuelve cada corchete por separado y al final se intersectan (es conjunción) sus soluciones.

PARTE I: $-x - 6 < x^2 - 4x - 8$

Una vez que se completa cuadrados y se saca raíz debe quedar: $|x - \frac{3}{2}| > \frac{\sqrt{17}}{2}$. A su vez, ésta tiene como soluciones $x > 3.5 \vee x < -0.5$. Escrito como intervalos:

$$(-\infty, -0.5) \cup (3.5, \infty)$$

PARTE II: $x^2 - 4x - 8 < x + 6$

Después de realizar operaciones similares a las del inciso anterior se obtiene: $|x - \frac{5}{2}| < \frac{9}{2}$. No es difícil llegar a la solución $-2 < x < 7$. Si se escribe en forma de intervalo: $(-2, 7)$.

El conjunto solución es

$$\left[(-\infty, -0.5) \cup (3.5, \infty) \right] \cap (-2, 7).$$

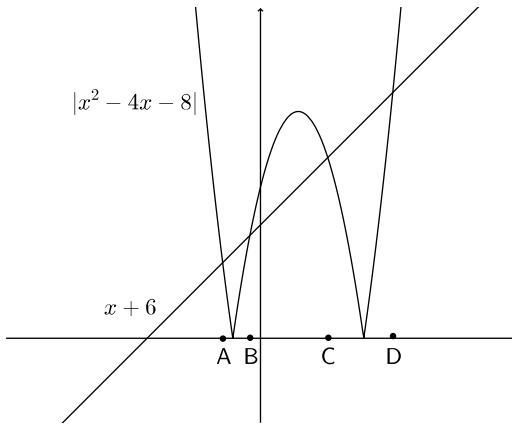


Figura 7.2

Conviene que calcules la intersección con las gráficas de los intervalos. Obtendrás: $(-2, -0.5) \cup (3.5, 7)$.

La representación gráfica del problema se encuentra en la figura 7.2. El punto $A = -2$, $B = -0.5$, $C = 3.5$ y $D = 7$. La gráfica reafirma nuestra solución algebraica.

7. Primero observe que $\frac{1}{x^{-1}} = x$

$$\begin{aligned}
 2(x^{-1} + 3) + \frac{1}{x^{-1}} &= 2x - x^{-1} \\
 x \left[2(x^{-1} + 3) + x \right] &= x \left[2x - x^{-1} \right] && \text{(mult. por } x) \\
 x \left[2x^{-1} + 6 + x \right] &= x \left[2x - x^{-1} \right] \\
 2 + 6x + x^2 &= 2x^2 - 1
 \end{aligned}$$

La expresión es equivalente a $x^2 - 6x - 3 = 0$. Use la fórmula general para resolverla.

8. (a)

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{1 + \left[\frac{-2x}{1-x^2} \right]^2} = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1-x^2)^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2}{(1-x^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(1-x^2)^2}} = \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2}{(1-x^2)^2}} \\
 &= \frac{x^2 + 1}{|1-x^2|}
 \end{aligned}$$

$$\text{Así, } A = \frac{x^2 + 1}{|1-x^2|}.$$

(b) Si $0 < x < 1$ implica que $1 - x^2 > 0$, de donde $A = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}$.

Si $x > 1$, entonces $1 - x^2 < 0$, de donde $A = \frac{x^2 + 1}{-1 + x^2}$.

Sol. ejercicios 9. 1.

2. Es claro que

$$\mathbf{P}(n) : \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i.$$

Se tienen que probar dos cosas:

(i) $\mathbf{P}(1)$ es verdadera.En este caso $\mathbf{P}(1)$ es

$$\sum_{i=1}^1 (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^1 a_i + \sum_{i=1}^1 b_i.$$

Por definición de sumatoria $\sum_{i=1}^1 (a_i + b_i) = a_1 + b_1$, $\sum_{i=1}^1 a_i = a_1$ y $\sum_{i=1}^1 b_i = b_1$. Es evidente la igualdad pedida.

(ii) $\mathbf{P}(k) \implies \mathbf{P}(k+1)$. En forma equivalente, se pide una prueba de

$$\sum_{i=1}^k (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^k a_i + \sum_{i=1}^k b_i \implies \sum_{i=1}^{k+1} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{k+1} a_i + \sum_{i=1}^{k+1} b_i$$

Empecemos.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{k+1} (a_i + b_i) &= \sum_{i=1}^k (a_i + b_i) + (a_{k+1} + b_{k+1}) && \text{(def. de sumatoria)} \\
 &= \sum_{i=1}^k a_i + \sum_{i=1}^k b_i + (a_{k+1} + b_{k+1}) && \text{(hip. de inducción)} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) + a_{k+1} + \left(\sum_{i=1}^k b_i \right) + b_{k+1} \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} a_i + \sum_{i=1}^{k+1} b_i && \text{(def. de sumatoria)}
 \end{aligned}$$

3.

4. Para esto considere $a_i = i^4$. La propiedad telescópica

$$\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0,$$

exige calcular: $a_{i-1} = (i-1)^4$, $a_n = n^4$, y $a_0 = 0^4 = 0$.

$$\sum_{i=1}^n (i^4 - (i-1)^4) = n^4$$

$$i^4 - (i-1)^4 = i^4 - i^4 + 4i^3 - 6i^2 + 4i - 1 = 4i^3 - 6i^2 + 4i - 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (4i^3 - 6i^2 + 4i - 1) &= n^4 \\ \sum_{i=1}^n 4i^3 - \sum_{i=1}^n 6i^2 + \sum_{i=1}^n 4i - \sum_{i=1}^n 1 &= n^4 \\ 4 \sum_{i=1}^n i^3 - 6 \sum_{i=1}^n i^2 + 4 \sum_{i=1}^n i - n &= n^4 \\ 4 \sum_{i=1}^n i^3 - 6 \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) + 4 \frac{n(n+1)}{2} - n &= n^4 \\ 4 \sum_{i=1}^n i^3 - 2n^3 - 3n^2 - n + 2n^2 + 2n - n &= n^4 \\ 4 \sum_{i=1}^n i^3 - 2n^3 - n^2 &= n^4 \\ 4 \sum_{i=1}^n i^3 &= n^4 + 2n^3 + n^2 \\ \sum_{i=1}^n i^3 &= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}. \end{aligned}$$

5. El número r es constante. Además,

$$\mathbf{P}(n) : 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

(i) $\mathbf{P}(1)$ es verdadera.

Evidentemente

$$\mathbf{P}(1) : 1 + r^1 = \frac{1 - r^2}{1 - r}.$$

Sin embargo, $\frac{1-r^2}{1-r} = 1 + r$. Por ende, se tiene que mostrar que $1 + r^1 = 1 + r$, lo cual es obvio.

(ii) $\mathbf{P}(k) \implies \mathbf{P}(k+1)$.

En términos de la expresión en turno, se debe mostrar la siguiente implicación:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \implies 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}$$

Se empieza por sumar a ambos lados de la hipótesis de inducción r^{n+1} , luego se simplifica:

$$\begin{aligned} 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} \\ &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + \frac{r^{n+1}(1 - r)}{1 - r} \\ &= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} \\ &= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \end{aligned}$$

6. Es claro que $\mathbf{P}(n) : \frac{5^n - 1}{4} \in \mathbb{Z}$.

(i) $\mathbf{P}(1)$ es verdadera.

Para el caso,

$$\mathbf{P}(1) : \frac{5^1 - 1}{4} \in \mathbb{Z},$$

pero $5^1 - 1 = 4$ y entonces $\frac{5^1 - 1}{4} \in \mathbb{Z}$

(ii) Mostrar que $\frac{5^n - 1}{4} \in \mathbb{Z} \implies \frac{5^{n+1} - 1}{4} \in \mathbb{Z}$. Debido a que $\frac{5^n - 1}{4} \in \mathbb{Z}$, si lo multiplicamos por 5, resulta otro entero, en otras palabras $5 \cdot \frac{5^n - 1}{4} \in \mathbb{Z}$. Reacomodando resulta

$$\begin{aligned} 5 \cdot \frac{5^n - 1}{4} &= \frac{5^{n+1} - 5}{4} = \frac{5^{n+1} - 4 - 1}{4} \\ &= \frac{5^{n+1} - 1 - 4}{4} \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{5^{n+1} - 1}{4} - 1 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Si al entero $\frac{5^{n+1} - 1}{4} - 1$ le sumamos 1, resultará otro entero. Así, $\frac{5^{n+1} - 1}{4} - 1 + 1 = \frac{5^{n+1} - 1}{4} \in \mathbb{Z}$.

7. $\mathbf{P}(n) : 2^n < n!$

En este caso, el menor número sobre el que se empieza es 4.

(i) $\mathbf{P}(4)$ es verdadera.

En este caso se debe probar que $2^4 < 4!$. Resulta obvio, pues $2^4 = 16$ y $4! = 24$

- (ii) Muestra que $2^k < k! \implies 2^{k+1} < (k+1)!$
Será de utilidad notar que

$$2 < k + 1 \quad (*)$$

pues la k es un número natural y estos toman valores mayores o iguales a 1. Multiplicando por $k!$ la expresión (*), se obtiene

$$2(k!) < (k+1)(k!). \quad (**)$$

en consecuencia $2(k!) < (k+1)!$

Ahora bien, multiplique la hipótesis de inducción por 2, $2^{k+1} < 2(k!)$. Si utilizamos la expresión (**)

$$2^{k+1} < 2(k!) < (k+1)!$$

por transitividad $2^{k+1} < (k+1)!$

8. Es necesario recordar el concepto de divisibilidad: Se dice que el entero b es divisible por el entero a si existe c , tal que $b = ac$.
Ahora, regresemos al problema. No es difícil advertir que

$$\mathbf{P}(n) : n^3 + 2n \text{ es divisible por } 3.$$

- (i) $\mathbf{P}(1)$ en este caso es $1^3 + 2(1) = 3$ que es divisible por 3.
(ii) Se tiene que probar la implicación:

$$k^3 + 2k \text{ es divisible por } 3 \implies (k+1)^3 + 2(k+1) \text{ es divisible por } 3$$

La hipótesis de inducción indica divisibilidad entre 3, entonces existe c , tal que $k^3 + 2k = 3c$. Por otro lado

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 \\ &= k^3 + 2k + (3k^2 + 3k + 3) \\ &= k^3 + 2k + 3(k^2 + k + 1) \\ &= 3c + 3(k^2 + k + 1) \quad (\text{pues } k^3 + 2k = 3c) \\ &= 3(c + k^2 + k + 1) \end{aligned}$$

Sin duda, por su forma, $(k+1)^3 + 2(k+1)$ es divisible por 3.

$$9. \mathbf{P}(n) : \sum_{i=1}^n 3^{i-1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

$$(i) \mathbf{P}(1) : \sum_{i=1}^1 3^{i-1} = \frac{3^1 - 1}{2} \text{ es verdadero.}$$

Por un lado, usando la definición de sumatoria (definición 6.2.1, en su segunda parte),

$$\sum_{i=1}^1 3^{i-1} = 3^{1-1} = 3^0 = 1.$$

Por otro lado, $\frac{3^1 - 1}{2} = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Por lo tanto, $\sum_{i=1}^1 3^{i-1} = \frac{3^1 - 1}{2}$.

(ii) Demuestra que

$$\sum_{i=1}^k 3^{i-1} = \frac{3^k - 1}{2} \implies \sum_{i=1}^{k+1} 3^{i-1} = \frac{3^{k+1} - 1}{2}$$

Usando la segunda parte de la definición de sumatoria, resulta que

$$\sum_{i=1}^{k+1} 3^{i-1} = \left(\sum_{i=1}^k 3^{i-1} \right) + 3^{k+1-1}$$

Ahora, utilizando la hipótesis de inducción y simplificando

$$\begin{aligned} &= \frac{3^k - 1}{2} + 3^k = \frac{3^k - 1}{2} + \frac{2 \cdot 3^k}{2} \\ &= \frac{3^k - 1 + 2 \cdot 3^k}{2} = \frac{3 \cdot 3^k - 1}{2} \\ &= \frac{3^{k+1} - 1}{2} \end{aligned}$$

10.

$$\left(\frac{1}{x} - x^4 \right)^{30} = \sum_{n=0}^{30} \binom{30}{n} \left(\frac{1}{x} \right)^{30-n} (-x^4)^n$$

El término independiente, es exactamente cuando no hay, en este caso, factor x . Se modificará $\left(\frac{1}{x} \right)^{30-n} (-x^4)^n$, para identificar el valor de n ,

que logre esto.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x}\right)^{30-i} (-x^4)^i &= (x^{-1})^{30-i} [(-1)(x^4)]^i = (x^{-1})^{30-i} (-1)^i (x^4)^i \\ &= (x^{-1})^{30-i} (-1)^i x^{4i} = x^{-30+i} (-1)^i x^{4i} = (-1)^i x^{-30+i+4i} \\ &= (-1)^i x^{-30+5i} \end{aligned}$$

Observe que para obtener el término independiente, es suficiente con resolver $-30 + 5i = 0$. Por lo tanto, el término independiente se obtiene cuando $i = 6$. Veamos

$$\binom{30}{6} \left(\frac{1}{x}\right)^{30-6} (-x^4)^6 = 593775 (x^{-1})^{24} (-x^4)^6 = 593775.$$

Apéndice A

Axioma del supremo

Ya se mencionaron los axiomas de campo y de orden, propiedades que satisfacen los números reales. Hace falta una propiedad que completa la caracterización de los reales, difícil de notar, pero tan importante como todas las demás: el axioma del supremo. Se hace necesaria su presencia en situaciones tan comunes como el hecho de que cada número positivo tiene una raíz cuadrada o que siempre hay un número natural más grande que cualquier otro. También, teoremas pilares sobre continuidad le deben su existencia.

A.0.1. Definición y ejemplos

Antes de enunciar el axioma del supremo, son necesarios algunos conceptos previos.

Definición A.0.1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Se dice que A está acotado superiormente si existe M , tal que

$$\forall a \in A : a \leq M$$

(b) Se dice que A está acotado inferiormente si existe m , tal que

$$\forall a \in A : m \leq a$$

(c) Se dice que A está acotado si se satisface (a) y (b).

Definición A.0.2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$. El número s es un supremo del conjunto A si:

(i) s es cota superior de A

(ii) Si M es cota superior de A entonces $s \leq M$

Existe otros dos conceptos que se relacionan con los anteriores: máximo y mínimo. El máximo de A , es un elemento $g \in A$, que es cota superior de A . En forma similar se define mínimo. Así, Si g y s son el máximo y supremo de un conjunto A , respectivamente, entonces $s \leq g$.

Teorema A.0.1. El supremo de un conjunto es único.

Demostración. Si s y s' son supremos del mismo conjunto A , entonces por la propiedad (ii), resulta que $s \leq s'$ y $s' \leq s$, de donde $s = s'$. Por lo tanto el supremo de un conjunto es único. \square

Teorema A.0.2. Si s es el supremo de A y $\delta > 0$ entonces existe $a \in A$ tal que $s - \delta < a$.

Demostración. Note que $s - \delta < s$. Suponga que

$$\forall a \in A : a \leq s - \delta,$$

entonces $s - \delta$ sería cota superior de A y como consecuencia de la parte (ii) de la definición de supremo se tendría $s \leq s - \delta$, lo cual es absurdo. De manera que existe $a \in A$ tal que $s - \delta < a$. \square

De la parte (ii) de la definición de supremo, es común decir que el supremo de un conjunto es la *la mínima de las cotas superiores*. He aquí el esperado axioma del supremo:

Axioma (Supremo). Si A es un conjunto de números reales, $A \neq \emptyset$ y A está acotado superiormente, entonces A tiene supremo.

Ejemplo A.0.1. Considere al intervalo abierto $A = (a, b)$. Obtenga el máximo y supremo de A .

Es claro que A no es vacío y está acotado superiormente por b , ¿cuál sería el supremo de A ? Sea s el supremo de A . En primer lugar, debido a que b es una cota superior, $s \leq b$ (definición A.0.2). Tenemos dos opciones para s : $s < b \vee s = b$. Si $s < b$, podemos contruir¹ x tal que

$$s < x < b$$

¹Vea la lista de ejercicios 6, ejercicio 4, en el cual se afirma que entre dos números reales cualquiera, siempre hay otro número real. Tal propiedad, se llama densidad de los reales.

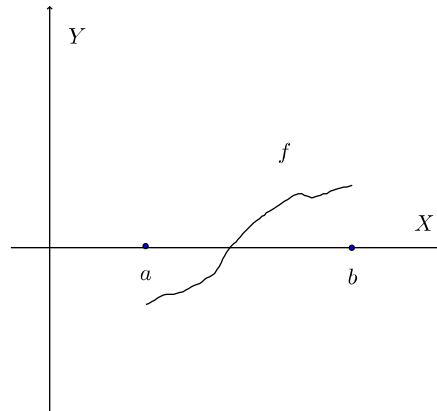


Figura A.1 $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$

Esto último indica que $x \in A$, pero es más grande que el supremo, lo cuál es absurdo, por lo tanto $s < b$ es falso. Resulta pues que $s = b$.

Suponga que g es el máximo de A . Sabemos que g debe ser un elemento del mismo conjunto A , esto es, $g < b$. Además, g debe ser cota superior de A , entonces $b \leq g$, pues b es el supremo de A . En resumen, si A tuviese máximo g entonces $g < b \wedge b \leq g$, esto no es posible. En consecuencia A no tiene máximo.

En especial, el ejercicio anterior muestra que, aunque sean conceptos semejantes, no es lo mismo supremo y máximo.

A.0.2. Tres aplicaciones del supremo

Claro que existen varias relaciones y propiedades sobre el supremo. Lo que ahora presentaré, es la aplicación del axioma en la obtención del teorema del valor intermedio, la existencia de raíz cuadrada para cada número positivo y la no existencia de cota superior de los naturales.

Teorema A.0.3 (cero intermedio). Si f es una función continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$.

Demostración. f es continua en los extremos a y b . De manera que existen

positivos δ_1 y δ_2 tales que:

$$\begin{aligned} 0 \leq x - a < \delta_1 &\text{ implica } |f(x) - f(a)| < -f(a) \\ 0 \leq b - x < \delta_2 &\text{ implica } |f(x) - f(b)| < f(b) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$a \leq x < \delta_1 + a \text{ implica } f(x) < 0 \quad (\text{A.1})$$

$$b - \delta_2 < x \leq b \text{ implica } f(x) > 0 \quad (\text{A.2})$$

Definamos un conjunto A , como sigue:

$$A = \{x \in [a, b] : f \text{ es negativa sobre } [a, x]\}$$

Es claro que los elementos de A son menores o iguales que b , es decir, A está acotado superiormente por b . Además, la expresión (A.1), demuestra en particular que $A \neq \emptyset$. Según el axioma del supremo A tiene supremo, digamos α .

Nuevamente, (A.1) conduce a que $a < \alpha$. Veamos la razón: considere un número x tal que $a < x < \delta_1 + a$, entonces $f(x) < 0$, es decir $x \in A$, por ende $x \leq \alpha$. Así que $a < x < \alpha$. Análogamente, de la expresión (A.2) se obtiene que $\alpha < b$.

Ahora, la idea consiste en mostrar que $f(\alpha) = 0$.

Supóngase en primer lugar que $f(\alpha) > 0$. Debido a la continuidad de f en α , existe $\delta > 0$ tal que

$$0 \leq |x - \alpha| < \delta \text{ implica } |f(x) - f(\alpha)| < f(\alpha)$$

A partir de lo cual se obtiene

$$\alpha - \delta < x < \alpha + \delta \implies f(x) > 0 \quad (*)$$

esto es, f es positiva en todo el intervalo $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$. Ahora bien, por el Teorema A.0.2, existe $x_0 \in A$ tal que

$$\alpha - \delta < x_0$$

Se tiene además $x_0 \leq \alpha$, pues α es el supremo de A . Por lo tanto

$$\alpha - \delta < x_0 < \alpha + \delta$$

Ya hay cosas absurdas: $f(x_0) < 0$, pues f negativa en $[a, x_0]$, pero $f(x_0) > 0$ por (*). Así, no es posible que $f(\alpha) > 0$.

Suponga ahora que $f(\alpha) < 0$. Como consecuencia de la continuidad

$$0 \leq |x - \alpha| < \delta \text{ implica } |f(x) - f(\alpha)| < -f(\alpha)$$

de donde

$$\alpha - \delta < x < \alpha + \delta \implies f(x) < 0 \quad (**)$$

f es negativa en $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ ². En particular, si $x_1 \in (\alpha, \alpha + \delta)$ entonces f es negativa en $[x_1, \alpha + \delta]$. Por otra parte, del Teorema A.0.2, existe $x_0 \in A$ tal que

$$\alpha - \delta < x_0 \leq \alpha < \alpha + \delta$$

Entonces f es negativa en $[a, x_0]$.

Ahora usemos los números x_0 y x_1 . Por (**), f es negativa en $[x_0, x_1]$. Lo anterior y dado que f es negativa en $[a, x_0]$ conduce a que f es negativa en $[a, x_1]$. En conclusión, $x_1 \in A$, lo cual es absurdo, pues $\alpha < x_1$ y α es el supremo de A . Por lo tanto, es falso que $f(\alpha) > 0$.

En resumen, por la ley de tricotomía, $f(\alpha) = 0$. □

Corolario A.0.1 (valor intermedio). Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$.

Corolario A.0.2. Todo número positivo posee raíz cuadrada.

Demostración. Sea $c > 0$. La función $f(x) = x^2$ es continua sobre $[0, c + 1]$. Note que $f(0) = 0 < c < f(c + 1)$. Por el corolario (A.0.1), existe $x \in [0, c + 1]$ tal que $x^2 = c$, es otras palabras, $x = \sqrt{c}$. □

Teorema A.0.4. El conjunto \mathbb{N} no está acotado superiormente.

Demostración. Suponga que \mathbb{N} está acotado superiormente. Por el axioma del supremo, el conjunto \mathbb{N} tiene supremo, digamos α . Entonces

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \leq \alpha$$

²no olvide que $\alpha - \delta < \alpha < \alpha + \delta$

Con fundamento en el teorema A.0.2, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha - 1 < n_0$$

de donde $\alpha < n_0 + 1$, sin embargo $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción, pues ningún número natural tendría que ser mayor que el supremo α . \square

Apéndice B

$\sqrt{2}$ es irracional

Antes que nada, es bien sabido por nuestros cursos elementales de matemáticas que cualquier fracción se puede simplificar hasta una forma mínima. Por ejemplo, si se tiene $\frac{28}{32}$,

$$\frac{28}{32} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

y decimos que la última fracción ya no se puede simplificar más, es decir, que 7 y 8 ya no tienen factores comunes excepto el número 1.

Teorema B.0.1. $\sqrt{2}$ es irracional.

Demostración. Se empieza suponiendo que $\sqrt{2}$ no es irracional, es decir, racional, con el propósito de lograr alguna contradicción. Entonces existen enteros a y b tales que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Con las ideas previas a este teorema, podemos exigir que la fracción $\frac{a}{b}$ sea simple, esto es, que a y b ya no tengan factores comunes diferentes de 1. Haciendo algunas operaciones:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= \frac{a}{b} \\ (\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ 2 &= \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2\end{aligned}$$

La última expresión indica que a^2 es un número par. La única forma para que ello ocurra es que a sea par. Si $a = 2k$ entonces

$$\begin{aligned}2b^2 &= (2k)^2 \\2b^2 &= 4k^2 \\b^2 &= 2k^2\end{aligned}$$

Resulta que b^2 es par, por lo tanto b es par. Suponga que $b = 2l$. De manera que $a = 2k$ y $b = 2l$, en consecuencia, tienen como factor común al número 2, lo cuál es una contradicción. Por ende $\sqrt{2}$ es irracional. \square

Apéndice C

Números complejos

C.1. Ideas iniciales

Es bien sabido que el polinomio $x^2 + 1 = 0$, no tiene solución, si consideramos x como número real. La imposibilidad, proviene del hecho de que si $x^2 + 1 = 0$, entonces $x^2 = -1$, pero es bien sabido que el cuadrado de cualquier número real es positivo, es decir:

$$x^2 = -1 = x^2 \geq 0$$

por ende, saldría la contradicción de que $0 \leq -1$. Claramente tal contradicción saldría para x real. Si se propusiera un número no real, tal que sus cuadrados fuesen negativos, se tendría una solución, pero no real. En el siglo XVI, el matemático italiano Gerolamo Cardano, se dedicó a obtener la solución a polinomios, en particular los de grado 3. En su obra *Ars Magna*, escrita en 1545, aparecen por primera vez raíces cuadradas de números negativos. La obra original de Cardano está hecha en latín.

Le he agregado una imagen (vea Figura C.1). ¿Que lenguaje es? ¿Dónde están las raíces en el texto? Si busca con cuidado en la imagen, hallará: 5m:Rx:m:15, que en lenguaje moderno sería $5 - \sqrt{-15}$.

Cardano no profundizó mucho en esa dirección. Un contemporáneo suyo, Rafael Bombelli, después de leer el *Ars Magna* de Cardano, investigó en el sentido de la aritmética de números del tipo $\sqrt{-15}$, estudiando sumas y multiplicaciones de ellos. Por otro lado, el famosísimo Euler, es considerado el primero en usar por primera vez i como representativo de $\sqrt{-1}$. Casper

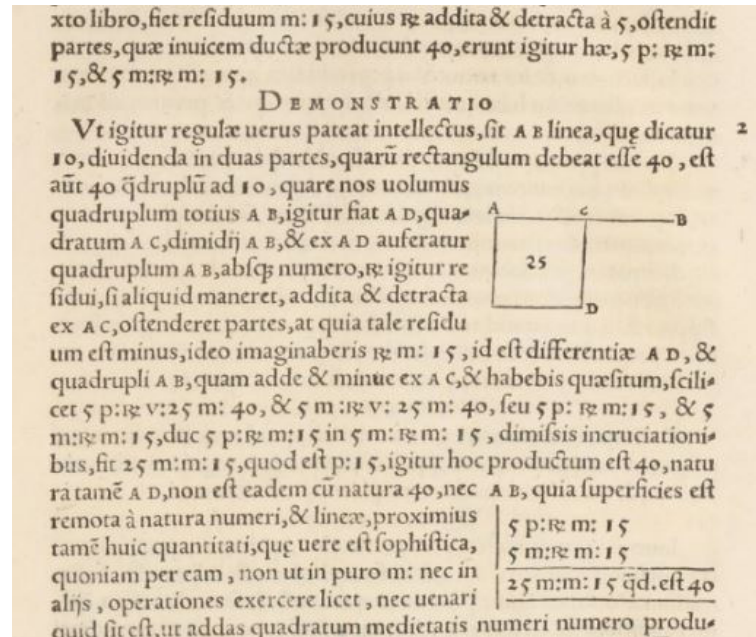


Figura C.1 Ars Magna, de Gerolamo Cardano, página 66.

Wessel en el siglo XVIII trabajó en la representación geométrica de los complejos y logró hacer una identificación de $a + bi$ con (a, b) .

En realidad, traté de dar una descripción lineal del desarrollo de los complejos, pero no es totalmente de esa manera. Naturalmente que, el desarrollo se dio de manera diversa y dispersa con aportes de diferentes lados, pero con la misma convergencia. Hubo una multitud de personajes muy importantes de la historia de las matemáticas que intervinieron. Quien tuvo el honor de presentar a los números complejos, como una escultura comunitaria terminada, fue Gauss. En su tesis doctoral, mostró que cualquier polinomio de grado n tiene exactamente n raíces. Este teorema es conocido como Teorema Fundamental del Álgebra.

Hay mucho más que decir de esto. Por el texto anterior, queda claro que el plano cartesiano, \mathbb{R}^2 , es un buen modelo para los complejos. Considere que $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, donde \mathbb{C} va a representar a los complejos. Observe que los números reales, pueden identificarse con el eje X , esto es, cada x real, tiene como forma compleja $(x, 0)$. Abusando un poco de la notación, es posible decir que

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. ¿Cuáles son las operaciones de suma y producto en los complejos? A veces se escriben de la siguiente manera: Si $(a, b), (c, d)$ son complejos:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (\text{C.1})$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (\text{C.2})$$

No es difícil, pero sí aparatoso, mostrar que, con dichas operaciones los complejos satisfacen todos los axiomas de campo (no los de orden) de los reales: cerradura, conmutatividad, asociatividad, existencia del cero, del uno, inversos aditivos, multiplicativos. Ello indica que \mathbb{C} con las operaciones dadas es un campo. De manera que los teoremas obtenidos de los axiomas de campo (no los de orden) en los reales, se valen para complejos. Eso ya nos permite realizar varias operaciones similares a las ya conocidas de los números reales, sin preocupaciones.

Problema 1. Pruebe que la definición de producto dada, es conmutativa, es decir: $(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$. Las propiedades restantes las mostrará más adelante y de una manera más fácil.

Ejemplo C.1.1. Sea $i = (0, 1)$. Con las operaciones dadas, no es difícil mostrar que

$$(0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 0)$$

Veamos

$$(0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 1)(0, 1) + (1, 0) \quad (\text{C.3})$$

$$= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) + (1, 0) \quad (\text{C.4})$$

$$= (-1, 0) + (1, 0) \quad (\text{C.5})$$

$$= (0, 0). \quad (\text{C.6})$$

Realizando la identificación ya mencionada de 1 con $(1, 0)$ y de 0 con $(0, 0)$, resulta que $i^2 + 1 = 0$, es decir $i^2 = -1$. Lo cual justifica lo dicho por Euler.

Es notable la dificultad de la multiplicación, usando parejas ordenadas. De manera que en vez de usar (a, b) , usaremos $a + bi$, que ya se había mencionado. Es conocida como forma binómica. Dicha forma de anotar complejos, justificada por Wessel, hará las operaciones más sencillas.

En realidad, para nosotros, el campo de los complejos es el conjunto:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ y } i^2 = -1\}$$

la forma de operar, se entenderá con algunos ejemplos.

Ejemplo C.1.2. Sume los números complejos $2 + 4i$ y $\frac{1}{2} + 3i$

$$(2 + 4i) + \left(\frac{1}{2} + 3i\right) = \frac{5}{2} + 7i$$

Ejemplo C.1.3. Multiplique los números complejos $2 + 4i$ y $\frac{1}{2} + 3i$

$$(2 + 4i)\left(\frac{1}{2} + 3i\right) = 1 + 6i + 2i + 12i^2 \quad (\text{C.7})$$

$$= 1 + 6i + 2i - 12 \quad (\text{C.8})$$

$$= -11 + 8i \quad (\text{C.9})$$

Como puede notar, la multiplicación se reduce a la mecánica ya conocida en la multiplicación de binomios, sólo que en este caso se usa que $i^2 = -1$.

Ejemplo C.1.4. Considere el complejo $\frac{1}{1 + 2i}$. Obviamente no está en su forma binómica. Ahora indicaremos la técnica para llevarlo a dicha forma.

$$\frac{1}{1 + 2i} = \frac{1}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} \quad (\text{C.10})$$

$$= \frac{1 - 2i}{1 - 4i^2} \quad (\text{C.11})$$

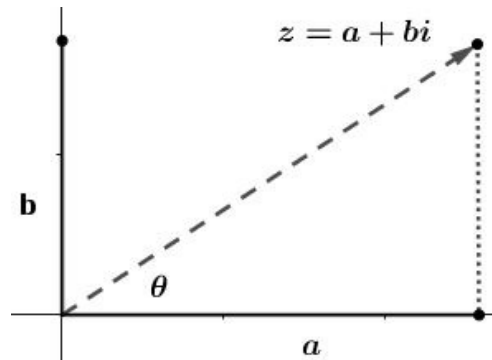
$$= \frac{1 - 2i}{1 + 4} \quad (\text{C.12})$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \quad (\text{C.13})$$

Problema 2. Ahora sí, va a demostrar que \mathbb{C} satisface todos los axiomas de campo, pero realizando las operaciones análogamente a los ejemplos anteriores.

C.2. Forma trigonométrica

Cuando un número complejo es dado en la forma $z = a + bi$, se dice que se encuentra en forma binómica. Es posible graficar tal complejo en el plano cartesiano, como si se tratara de (a, b) . En realidad, z puede ser considerado como el punto (a, b) o, según convenga, con el vector que empieza en $(0, 0)$ y termina en el punto (a, b) . De manera que se obtiene una dirección dada por un ángulo θ ($0 \leq \theta < 2\pi$ y se llama argumento principal) y una longitud denotada por r ó $|z|$.

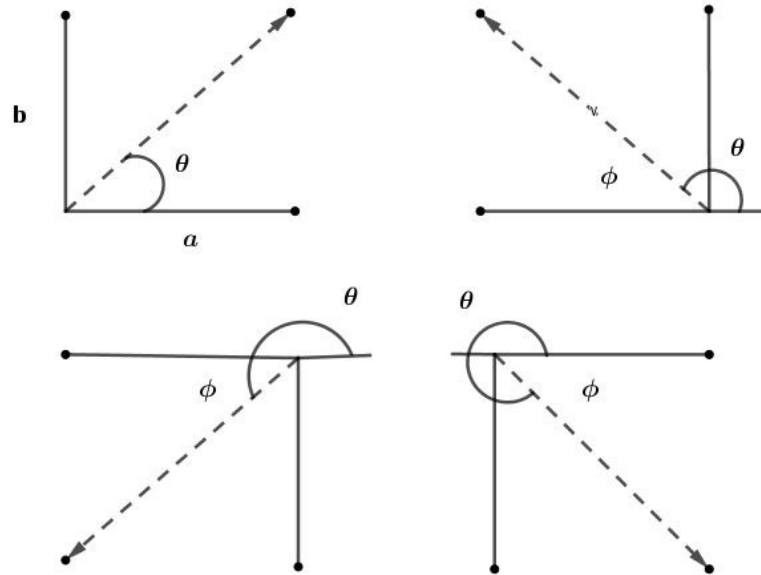


La longitud a la que se hace referencia, se obtiene de la línea punteada (guiones largos). Usando el teorema de Pitágoras, es fácil obtener que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Es frecuente llamar a $|z|$, módulo de z .

¿Cuál es la forma trigonométrica de un número complejo? La forma trigonométrica del complejo $z = a + bi$ es

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \quad (*)$$

La técnica para obtener θ y $|z|$, se basa en la idea gráfica:



y es la siguiente:

1. Obtenga $|z|$ mediante la fórmula:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2. Calcule

$$\phi = \arctan \left| \frac{b}{a} \right|$$

3. Si z se encuentra en el primer cuadrante: $\theta = \phi$.
 Si z se encuentra en el segundo cuadrante: $\theta = 180 - \phi$
 Si z se encuentra en el tercer cuadrante: $\theta = 180 + \phi$.
 Si z se encuentra en el cuarto cuadrante: $\theta = 360 - \phi$.

Ejemplo C.2.1. Obtenga la forma trigonométrica del número complejo: $z = -\sqrt{3} - i$. Es necesario identificar la parte real e imaginaria. Claro que $a = -\sqrt{3}$ y $b = -1$. Según los pasos a seguir, toca obtener ϕ .

$$\phi = \arctan \left| \frac{-1}{-\sqrt{3}} \right| = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = 30$$

Como z se encuentra en el tercer cuadrante entonces $\theta = 180 + \phi = 180 + 30 = 210$. Por otro lado obtenemos el módulo

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2.$$

En resumen, la forma trigonométrica (vea la expresión (*)) de $z = -\sqrt{3} - i$ es:

$$z = 2(\cos 210 + i \operatorname{sen} 210)$$

C.3. Teorema de moivre

Este teorema simplifica las operaciones al momento de calcular las potencias de números complejos. Al mismo tiempo, permite dar elementos que originan la definición de raíz compleja. Recuerde que cualquier número complejo $z = a + bi$, puede expresarse en forma trigonométrica, es decir

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

donde $|z|$ y θ corresponden al módulo de z y al argumento del mismo, respectivamente. Es necesario, previamente al teorema de moivre, realizar la multiplicación de dos complejos en forma trigonométrica, lo cual permitirá visualizar cierta propiedad importante. Sean $z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ y $z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$. Entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) |z_2|(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \end{aligned}$$

es decir

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)$$

Aquí ocupamos la propiedad $i^2 = -1$ y reagrupamos

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| \left(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i(\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2) \right)$$

En este punto es necesario recordar dos identidades trigonométricas, a saber

$$\begin{aligned}\cos(x + y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ \operatorname{sen}(x + y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x\end{aligned}$$

En nuestro caso:

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) \right) \quad (\text{C.14})$$

En particular, lo anterior aplicado para el número $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, se obtiene que

$$\begin{aligned}z^2 &= z \cdot z \\ &= |z| |z| (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \\ &= |z|^2 \left(\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta) \right)\end{aligned}$$

es decir $z^2 = |z|^2 \left(\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta) \right)$. De la misma forma, escribiendo $z^3 = z^2 \cdot z$, es fácil llegar a que

$$z^3 = |z|^3 \left(\cos(3\theta) + i \operatorname{sen}(3\theta) \right)$$

Tal parece que no hay problema en generalizar este proceso multiplicativo para cualquier número natural. Esto es precisamente lo que afirma el teorema de Moivre.

Teorema C.3.1 (Moivre). Si $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$z^n = |z|^n \left(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) \right) \quad (*) \quad (\text{C.15})$$

Es necesario mencionar que la forma correcta de demostrar la validez del teorema es utilizar el recurso de la inducción matemática. Sin embargo, dicha prueba recurre únicamente al proceso descubierto al multiplicar dos números complejos.

Ejemplo C.3.1. Usando el teorema de moivre calcula

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8$$

El teorema es útil para complejos que estan en forma trigonométrica, de manera que el primer paso consiste en poner en forma trigonométrica a $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Requerimos entonces del módulo y el argumento de z .

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

Por otro lado, es claro que $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, se encuentra en el primer cuadrante, por lo tanto el valor de θ se encuentra de la siguiente forma:

$$\theta = \arctan \left| \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \right| = \arctan(\sqrt{3}) = 60$$

Asi pues, recordando que la forma trigonométrica de un número complejo es $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, resulta

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1(\cos 60 + i \operatorname{sen} 60) = \cos 60 + i \operatorname{sen} 60$$

Llega el momento de utilizar el teorema:

$$z^8 = (\cos 60 + i \operatorname{sen} 60)^8 = \cos 480 + i \operatorname{sen} 480$$

Existe la posibilidad de dejarlo indicado, esto es, $z^8 = \cos 480 + i \operatorname{sen} 480$, pero 480 no es el argumento principal. Requerimos un ángulo entre 0 y 360. En este caso

$$z^8 = \cos 120 + i \operatorname{sen} 120$$

pues se sabe que $\cos 480 = \cos(360 + 120) = \cos 120$. Lo mismo para el seno. Por ende

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8 = \cos 120 + i \operatorname{sen} 120$$

Queda de ejercicio, mostrar que la solución puede presentarse como $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Usa que $\cos 120 = -\cos 60$, que deriva de la identidad $\cos(180+x) = -\cos x$.

C.4. Raíces de números complejos

¿Recuerda usted qué significa que 3 sea la raíz cuadrada de 9? pues significa que $3^2 = 9$. De la misma forma 4 es raíz cuadrada de 16, porque $4^2 = 16$. Análogamente, 2 es raíz cúbica de 8, debido a la igualdad $2^3 = 8$. En términos generales

$$r \text{ es la raíz } n\text{-ésima de } x, \text{ si } r^n = x$$

En el caso de números complejos, se mantendrá la misma idea. Así, si z y x son complejos, entonces

$$z \text{ es raíz } n\text{-ésima de } x, \text{ si } z^n = x$$

La potencia n -ésima de z nos hace pensar en el teorema (C.3.1).

Ahora mostremos un teorema que determina cuantas raices tiene un número complejo.

Teorema C.4.1. Todo número complejo z ($z \neq 0$) tiene exactamente n raíces n -ésimas complejas.

Demostración. En términos que explicamos previamente al teorema, esto es equivalente a lo siguiente:

Si z es un complejo no cero, entonces existen exactamente n complejos distintos $w : w^n = z$

Considere al complejo dado $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. Por otro lado, determinemos los complejos $w = |w|(\cos \psi + i \operatorname{sen} \psi)$ tales que $w^n = z$. En otras palabras

$$(|w|(\cos \psi + i \operatorname{sen} \psi))^n = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Lo anterior, usando el teorema de Moivre es igual a

$$|w|^n(\cos(n\psi) + i \operatorname{sen}(n\psi)) = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

A partir de aquí se generan dos igualdades:

$$\begin{aligned} |w|^n &= |z| \\ \cos(n\psi) + i \operatorname{sen}(n\psi) &= \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

La primera es clara, pues al ser complejos iguales, deben tener módulos iguales. Por otro lado, la segunda trae como consecuencia

$$\cos(n\psi) = \cos\theta \quad \text{y} \quad \sin(n\psi) = \sin\theta$$

En ambos casos se obtiene: $n\psi = \theta + 2k\pi$. En forma equivalente

$$\psi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Hemos encontrado el argumento, el cual determina w . Sin embargo, hace falta obtener los valores posibles para k . Para ello, recuerde la forma en la que se dividía en la educación primaria. Si hace la división de $k \div n$, obtendrá

$$k = n \cdot q + R$$

donde R es entero y $0 \leq R \leq n - 1$. En conclusión, si se varían los valores de R , se obtienen los valores de k . Si usted es observador, notará que entonces hay n valores posibles para k . Lo cual genera n valores de ψ , de donde se producen n complejos w que satisfacen: $w^n = z$. \square

Podemos hacer un resumen del teorema anterior: Las n raíces n -ésimas complejas de $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, se obtienen de

$$w = |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad (*)$$

donde $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$. Obviamente los ángulos manejados están en radianes. Si trabaja con grados, usa la expresión $\theta + 360k$ en lugar de $\theta + 2k\pi$.

Ejemplo C.4.1. Obtenga las tres raíces cúbicas del número complejo $z = 1 - \sqrt{3}i$

Es necesario escribir a z en forma trigonométrica.

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\phi = \arctan \left| \frac{b}{a} \right| = \arctan \left| \frac{-\sqrt{3}}{1} \right| = \arctan \sqrt{3} = 60$$

Ahora bien, z se encuentra en el cuarto cuadrante, por lo que $\theta = 360 - \phi = 300$. Se ha concluido una parte: $z = 2(\cos 300 + i \sen 300)$. Las tres raíces se encuentran con la fórmula (*), para $k = 0, 1, 2$. Como obtuvimos θ en grados, escribimos $\theta + 360k$ en lugar de $\theta + 2k\pi$ en (*).

$$\begin{aligned} w_1 &= 2^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{300 + 360(0)}{3} + i \sen \frac{300 + 360(0)}{3} \right) \\ w_2 &= 2^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{300 + 360(1)}{3} + i \sen \frac{300 + 360(1)}{3} \right) \\ w_3 &= 2^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{300 + 360(2)}{3} + i \sen \frac{300 + 360(2)}{3} \right) \end{aligned}$$

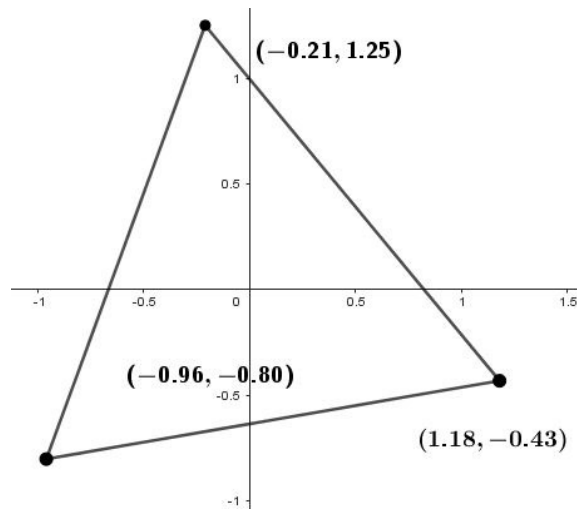
Efectuando las operaciones presentamos las tres raíces cúbicas de $z = 1 - \sqrt{3}i$

$$w_1 = 2^{\frac{1}{3}}(\cos 100 + i \sen 100)$$

$$w_2 = 2^{\frac{1}{3}}(\cos 220 + i \sen 220)$$

$$w_3 = 2^{\frac{1}{3}}(\cos 340 + i \sen 340)$$

La siguiente gráfica, muestra las tres raíces cúbicas de $z = 1 - \sqrt{3}i$:



Se nota que se distribuyen en un triángulo equilátero. En general se distribuyen en un polígono regular.

Bibliografía

- [1] Angoa Amador Juan J. Contreras Agustín, et al., *Matemáticas Elementales*, Textos Científicos (Buap), 2008.
- [2] Apostol M.T., *Análisis Matemático*, Reverté, España, 1981.
- [3] Euclides, *Elementos de Geometría (traducción, introducción y notas de Juan Davis García Bacca)*, UNAM, 1992.
- [4] Gardner Bartle R., *Introducción al análisis matemático de una variable*, Limusa, México, 1987.
- [5] De Gortari Elí. *Introducción a la lógica dialéctica*. Grijalbo(5^a edición), México: 1979.
- [6] Gutierrez Sáenz R. *Introducción a la lógica*. Esfinge(23^a edición), México: 1988.
- [7] Hilbert David, *Fundamentos de las matemáticas*, UNAM, 1993.
- [8] Lovaglia, Florence M., *Álgebra*, Harla, México, 1972.
- [9] Paenza Adrián, *Matemática...¿Estás ahí?*, Siglo veintiuno editores Argentina, Buenos Aires, 2005.
- [10] Spivak Michael, *Cálculo infinitesimal*, Reverté, España, 1996.
- [11] Struit Dirk J., *A concise history of mathematics. 4a edición*, Dover Publications, USA, 1987.
- [12] White Stephen, *Matemática y nueva pedagogía*, Promoción Cultural, España, 1973.